SUR LES INVARIANTS

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

THÈSE PRÉSENTÉE POUR LE DOCTORAT

PAR

MICHEL PHILIPPOFF.

VUE ET APPROUVÉE

PAR

LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE HEIDELBERG.

HEIDELBERG.
CARL WINTER'S UNIVERSITÄTSBUCHHANDLUNG.
1892.

SUR LES INVARIANTS

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

THÈSE PRÉSENTÉE POUR LE DOCTORAT

PAR

MICHEL PHILIPPOFF.

VUE ET APPROUVÉE

PAR

LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE HEIDELBERG.

HEIDELBERG.
CARL WINTER'S UNIVERSITÄTSBUCHHANDLUNG.
1892.

I.

La théorie des invariants des équations différentielles linéaires et homogènes a été l'objet de plusieurs travaux remarquables. En 1879 M. Laguerre donna la définition de ces invariants; puis M. Brioschi s'occupa de la question en calculant certains invariants. Ces deux géomètres ont édifié la théorie des invariants sans remarquer la relation fondamentale qui existe entre cette méthode et celle des invariants différentiels dont les propriétés principales ont été établies antérieurement par Lie et Halphen.

M. Sophus Lie fut le premier qui en 1872 donna la méthode permettant d'étendre le groupe fini et continu de substitutions en y faisant adjoindre les transformations que subissent les dérivées des variables. Le groupe proposé étant projectif, on pourra toujours en former des invariants analogues à ceux dont s'occupe l'Algèbre.

Cette idée fondamentale dûe à M. Lie a été approfondie par Halphen dans sa thèse bien connue (1878). C'était encore Halphen qui remarqua en 1882 l'identité fondamentale de sa propre théorie avec celle de M. Laguerre.

Nous voulons suivre l'ordre inverse en commençant par la définition précise des invariants des équations différentielles linéaires et homogènes.

Soit donné:

$$P_0\frac{d^nY}{dX^n} + (n)_1P_1\frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} + \ldots\ldots + P_nY = 0$$

une équation linéaire et homogène tout à fait générale si l'on veut accepter une fois pour toutes les restrictions suivantes:

1) Tous les coefficients de l'équation générale doivent être des fonctions synectiques de la variable X dans un contour donné.

2) Tous les coefficients sont différents de zéro dans le même contour. Cette dernière condition n'est indispensable que pour le coefficient P_0, comme on verra plus loin. Cependant nous voulons la retenir provisoirement pour tous les coefficients de la proposée en nous réservant le droit de discuter séparément tous les cas quand cette condition ne sera plus remplie. Nous voulons notamment traiter les équations où manquent certains termes comme des formes soit canoniques soit exceptionnelles.

Nous allons faire la substitution :

$$Y = U_0 y; \quad \frac{dx}{dX} = x_1$$

où U_0 et x_1 sont des fonctions synectiques et différentes de zéro dans le contour donné. Nous représenterons quelquefois cette substitution par le symbole $\{U_0, x_1\}$.

Nous poserons $P_0 = 1$ ce qui est évidemment permis, mais nous écrirons P_0 pour plus de symétrie.

La substitution $\{U_0, x_1\}$ devra transformer l'équation donnée en:

$$p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + (n)_1 p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

et nous pourrons y choisir $p_0 = 1$.

Nous allons maintenant former une fonction entière des coefficients P et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre fini.

Soit :

$$\Phi(P_1^{(m_1)}, \ldots P_n^{(m_n)})$$

cette fonction des coefficients de la proposée; soit encore:

$$\Phi(p_1^{(m_1)}, \ldots p_n^{(m_n)})$$

la transformée de la fonction Φ pour la substitution $\{U_0, x_1\}$. Si dans cette dernière expression la lettre Φ désigne la même fonction entière des nouveaux arguments p, et si l'on a identiquement:

$$\Phi(P_1^{(m_1)}, \ldots P_n^{(m_n)}) = x_1^{\lambda} \Phi(p_1^{(m_1)}, \ldots p_n^{(m_n)})$$

où λ est un nombre entier et où $x_1 = \frac{dx}{dX}$ est le module de la substitution, la fonction Φ sera par définition un invariant de l'équation différentielle. Si $\lambda = 0$ l'invariant est dit absolu.

De toutes les substitutions possibles nous voulons exclure la substitution identique $\{1, 1\}$, cela veut dire $Y = y$, $X = x +$ Const, qui ne peut évidemment définir aucun invariant.

Pour tout autre cas il est permis d'aller plus loin. On peut considérer la transformée deuxième, troisième . . . etc. en faisant les substitutions $y = V_0\eta$, $\xi_1 = \frac{d\xi}{dx}$ . . . On pourrait aussi poser directement $Y = U_0V_0\eta$; $\frac{d\xi}{dX} = x_1\xi_1$ . . . . . etc. Mais il est préférable de considérer une suite de transformations. Si cette suite est finie on n'obtient rien de nouveau. Mais il n'en est pas ainsi quand la série de substitutions devient infinie. Dans ce cas il faudra prouver que les produits infinis tels que U_0V_0 . . . . . ; $x_1\xi_1$ . . . . . sont synectiques et différents de zéro dans le contour donné, et s'il n'en est pas ainsi, la substitution limite ne pourra pas définir un invariant. Si la dernière des transformées est identiquement égale à la proposée, la série des transformations formera »un groupe«.

Nous ajoutons encore cette remarque, qu'une fonction entière telle que $\Phi(P_1^{(m_1)}, \ldots P_n^{(m_n)})$ n'est un invariant que dans le cas, où l'équation:

$$\Phi(P_1^{(m_1)}, \ldots P_n^{(m_n)}) = x_1^{\lambda}\Phi(p_1^{(m_1)} \ldots p_n^{(m_n)})$$

est remplie identiquement pour toute valeur de x_1 et indépendamment du choix spécial de U_0. Cette remarque ne s'applique cependant qu'à l'équation tout à fait générale.

On peut très bien concevoir des cas particuliers où certaines propriétés invariantes dépendent de la valeur spéciale du module; nous écartons ces cas provisoirement, pour y revenir quand il sera question des transformations canoniques. Mais nous pouvons dès à présent faire la remarque que notre définition d'un invariant suffit complètement pour justifier l'application de la transformation infinitésimale. Soit $Y = U_0y$ comme dans le cas général, mais $x = X + \varepsilon T$ où T est une fonction synectique de X dans le contour donné, ε étant une quantité infiniment petite indépendante de X et du premier ordre infinitésimal. On aura ainsi la substitution:

$$\{U_0,\ 1 + \varepsilon T_1\}.$$

La quantité ε étant arbitraire, mais infiniment petite, $1 + \varepsilon T_1$ sera différent de zéro dans le contour donné. La substitution infinitésimale remplit donc toutes les conditions pour faire engendrer un groupe de substitutions à la fois fini et continu. On peut donc considérer cette substitution comme étant absolument générale, en y faisant varier la fonction

T d'une manière continue, et on voit a priori la possibilité de calculer un invariant tout à fait général au moyen d'une substitution quasi spéciale[1].

Avant de traiter la théorie des invariants il nous faut encore poser la question générale sur la transformation des équations différentielles. Nous allons généraliser ce problème en considérant une équation différentielle comme un cas spécial du système des équations simultanées.

Pour abréger nos calculs, nous voulons écrire des fonctions linéaires algébriques ou analytiques sous une forme symbolique en désignant par:

	x_1	x_2
k_1	a_1	a_2
k_2	b_1	b_2

le système:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = k_1$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 = k_2$$

et d'une manière analogue le symbole:

	Y_1	Y_2
Y_1'	a_{11}	a_{12}
Y_2'	a_{21}	a_{22}

sera le représentant du système:

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1}{dX} = a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 \\ \dfrac{dY_2}{dX} = a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2. \end{cases}$$

On remarquera aussitôt que, étant donné le système linéaire algébrique:

---

[1] *M. Forsyth affirme cependant que la transformation infinitésimale ne peut servir que pour le calcul des coefficients numériques.*

1)

	Y_1 . . . . Y_i . . . Y_n
f_1	. . . . .
.	. . . . .
.	
f_h	. . . . P_{hi} . . . . .
.	
.	
.	
f_n	. . . . .

auquel nous allons appliquer la substitution linéaire:

2)

	y_1 . . . y_k . . . y_n
Y_1	. . . . .
.	
.	. . . . .
.	
Y_i	. . . . U_{ik} . . . .
.	
.	
.	. . . . .
Y_n	. . . . .

le coefficient de y_k dans Y_i étant U_{ik} et celui de Y_i dans f_h étant P_{hi}, la variable y_k entrera dans f_h avec le coefficient $R_{hk} = \sum_{1}^{n} P_{hi} U_{ik}$ et le système transformé sera:

	y_1 . . . y_k . . . y_n
f_1	R_{11} . . . . . R_{1n}
.	
.	. . . . .
.	
.	
f_h	. . . . R_{hk} . . . .
.	
.	. . . . .
.	
.	
f_n	R_{n1} . . . . . R_{nn}

ce qu'on trouve aussi par des considérations tout à fait élémentaires, mais ce qui nous permettra d'appliquer notre notation à la transformation des équations différentielles.

Nous écrirons maintenant le système de n-ième classe:

$$3) \qquad \begin{array}{c|ccc} & Y_1 & \dots & Y_n \\ \hline Y_1' & P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_n' & P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{array}$$

que nous allons transformer au moyen d'une substitution linéaire à n variables nouvelles. Nous pouvons donc choisir la substitution 2) en supposant bien entendu que le déterminant formé des quantités U et que nous voulons appeler »le déterminant U« soit synectique et différent de zéro dans le contour donné.

Formons maintenant:

$$R_{hk} = \sum_{1}^{n} {}_i P_{hi} U_{ik}$$

et désignons $R_{hk} - \dfrac{dU_{hk}}{dX}$ par Q_{hk}.

Changeons de variable indépendante, en posant $\dfrac{dx}{dX} =$ à une fonction de X, synectique et différente de zéro dans le contour donné. Nous avons:

$$4) \qquad \begin{array}{cc|c} & & \overbrace{\quad\quad}^{\frac{dX}{dx}} \\ y_1' & y_n' & y_1 \dots y_n \\ \hline U_{11} & U_{1n} & Q_{11} \dots Q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{n1} & U_{nn} & Q_{n1} \dots Q_{nn} \end{array}$$

où nous avons posé $\dfrac{dy_1}{dx} = y_1'$, ..., tandis que $\dfrac{dX}{dx}$ est le facteur commun du second membre. Pour écrire 4) sous une forme normale,

désignons par $U_{(ik)}$ celui des mineurs du déterminant U qui appartient à l'élément U_{ik}. Soit (U) le déterminant réciproque formé des éléments $U_{(ik)}$; Q le déterminant formé des éléments $Q_{11}, \ldots, Q_{nn}$. Définissons $U\frac{dx}{dX}\, p_{hk} = q_{hk}$ en désignant par q_{hk} un élément du déterminant $Q \cdot (U)$, élément formé par la juxtaposition des colonnes des deux déterminants Q et (U), de manière à avoir:

$$q_{11} = Q_{11}U_{(11)} + \ldots Q_{n1}U_{(n1)} \text{ etc.}$$

Nous obtiendrons le système:

5)

	$y_1 \ldots y_n$
y_1'	$p_{11} \ldots p_{1n}$
.	. . . . .
.	. . . . .
.	. . . . .
.	. . . . .
y_n'	$p_{n1} \ldots p_{nn}$.

Le problème de la transformation est donc résolu complètement. On peut appliquer ce résultat au cas d'une seule équation linéaire et homogène; quelques remarques très simples suffisent pour traiter ce cas spécial.

II.

Une seule équation linéaire et homogène étant équivalente à un système spécial, il est évident que la transformation générale doit être modifiée dans ce cas.

Soit donné le système:

6)

	$Y_1\ Y_2 \ldots Y_n$
Y_1'	$0\ 1 \ldots 0$
Y_2'	$0\ 0\ 1 \ldots 0$
. .	. . . . .
Y_n'	$P_{n1}\ P_{n2} \ldots P_{nn}$

équivalent à une seule équation:

$$7)\quad \frac{d^nY}{dX^n} + (n)_1P_1\frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} + \ldots + P_nY = 0,$$

où l'on a posé: $Y_1 = Y$, $\frac{dY_k}{dX} = Y_{k+1}$, et enfin:

$P_{n1} = -P_n$; $P_{n2} = -\,{}_{(n)_1}P_{n-1}$; . . . . $P_{nn} = -\,{}_{(n)_1}P_1$.

Essayons la substitution:

8)

	y_1	y_2	. . . . .	y_n
Y_1	U_{11}	0	. . . . .	0
Y_2	U_{21}	U_{22}	. . . .	0
.			. . . . .	
.			. . . . .	
Y_n	U_{n1}	U_{n2}	. . .	U_{nn}

en posant $U_{ki} = 0$, si $i > k$.

Pour justifier ce choix, remarquons que la substitution $Y = Y_1 = U_0 y_1 = U_0 y$ appliquée à 6) sans changer de variable indépendante, donnerait évidemment le système:

9)

	y_1	$\frac{dy_1}{dX}$	. . . .	$\frac{d^{n-1}y_1}{dX^{n-1}}$
Y_1	U_0	0	. . . . .	0
Y_2	U_1	U_0	. . . . .	0
.			. . . . .	
.			. . . . .	
Y_n	U_{n-1}		. . . . .	U_0.

Mais ce système ne peut pas être identifié à 8) puisqu'il faut encore changer X en x.

Pour atteindre ce but il suffit de poser:

10)

	y_2	y_3	. . . .	y_n
$\frac{dy_1}{dX}$	A_{11}	0	. . . .	0
.			. . . . .	
.			. . . . .	
$\frac{d^n y_1}{dX^n}$	A_{n1}		. . . . .	A_{nn}

où les A sont les coefficients variables formés d'après une loi connue. Substituons 10) dans 9) et dans 6); puisque y_1 n'entre pas dans 10) on aura:

11)

	y_1	y_2	. . .	y_n
Y_1	U_0	0	. . . .	0
Y_2	U_1	U_{22}	. . .	0
.		. . . . .		
.		. . . . .		
Y_n	U_{n-1}	U_{n2}	. . .	U_{nn}

ce qui est identique à 8) si l'on pose $U_{11} = U_0$, $U_{21} = U_1$, . . . $U_{n1} = U_{n-1}$.

Les quantités U_{22}, . . . U_{nn} sont des fonctions de U_0, U_1 . . . . et des A.

Cela fait, nous pouvons appliquer directement la méthode générale et il est facile de démontrer que le système transformé sera de la forme:

	y_1	y_2	. . . .	y_n
y_1'	0	1	. . . .	0
.				
.				
.				
y_n'	p_{n1}	. . . . .		p_{nn}

tout à fait analogue à celle du système proposé.

Ainsi pour le système de deuxième classe:

	Y_1	Y_2
Y_1'	0	1
Y_2'	$-P_2$	$-2P_1$

équivalent à $\dfrac{d^2Y}{dX^2} + 2P_1\dfrac{dY}{dX} + P_2Y = 0$ on trouvera le système transformé:

12)

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\dfrac{1}{x_1 U}}$$

	y_1	y_2
y_1'	$Q_{11}U_{(11)} + Q_{21}U_{(21)}$	$Q_{12}U_{(11)} + Q_{22}U_{(21)}$
y_2'	$Q_{11}U_{(12)} + Q_{21}U_{(22)}$	$Q_{12}U_{(12)} + Q_{22}U_{(22)}$

avec $U = \begin{vmatrix} U_0 & O \\ U_1 & U_0 x_1 \end{vmatrix}$

On trouve: $U_{(12)} = -U_1$; $U_{(22)} = U_0$; $U_{(11)} = U_0 x_1$; $U_{(21)} = 0$.

On aura donc:

$Q_{11}U_{(11)} + Q_{21}U_{(21)} = 0$; $Q_{12}U_{(11)} + Q_{22}U_{(21)} = U_0^2 x_1^2$ et on trouve: $p_{11} = 0$, $p_{12} = 1$ de manière à obtenir le système:

	y_1	y_2
y_1'	0	1
y_2'	$-p_2$	$-2p_1$

La première équation ne donne que l'identité $\frac{dy_1}{dx} = y_2$ et on voit qu'il suffit de calculer les coefficients de la dernière ligne.

On trouve:

$U_0 x_1^2 y'' + [(2P_1U_0 + 2U_1)x_1 + U_0 x_2]y' + (U_2 + 2P_1U_1 + P_2U_0)y = 0.$

La même méthode appliquée au système de trosième classe conduit au déterminant:

$$U = \begin{vmatrix} U_0 & 0 & 0 \\ U_1 & U_0 x_1 & 0 \\ U_2 & 2U_1 x_1 + U_0 x_2 & U_0 x_1^2 \end{vmatrix}$$

et on trouve facilement:

$$Q_{31} = -(U_3 + 3P_1U_2 + 3P_2U_1 + P_3U_0).$$

Comme il suffit de calculer les coefficients de la dernière équation le calcul sera très simple et on trouvera:

$$U_0 x_1^3 y''' + y''(3x_1^2 U_1 + 3U_0 x_1 x_2 + 3P_1 U_0 x_1^2) + y' \begin{Bmatrix} (3U_2 + 6P_1U_1 + 3P_2U_0)x_1 \\ + (3U_1 + 3P_1U_0)x_2 \\ + U_0 x_3 \end{Bmatrix} + y(U_3 + 3P_1U_2 + 3P_2U_1 + P_3U_0) = 0.$$

En divisant par $U_0 x_1^3$ ce qui est permis puisque ce produit est différent de zéro, on trouvera la transformée sous la forme:

$$y''' + 3p_1 y'' + 3p_2 y' + p_3 y = 0.$$

Revenons au cas général et calculons le coefficient p_n de la transformée. On a dans ce cas:

$$Q_{n1} = -(U_n + (n)_1 P_1 U_{n-1} + \ldots + P_n U_0)$$

comme on voit immédiatement d'après la définition de Q_{n1}.

Mais on a aussi: $Ux_1 p_{n1} = Q_{11} U_{(1n)} + \ldots + Q_{n1} U_{(nn)}$ et dans le cas actuel $U_{(1n)} = \ldots = U_{(n-1n)} = 0$. On trouve donc finalement:

$$U_0 x_1{}^n q_n = U_n + (n)_1 P_1 U_{n-1} + \ldots + P_n U_0.$$

Dans le cas $x = X$, $x_1 = 1$ on retrouve ainsi le résultat bien connu de Lagrange et on pourrait calculer ainsi tous les coefficients. Mais nous allons montrer une autre méthode plus pratique et qui s'appliquera à la substitution générale (U_0, x_1).

III.

Avant d'aborder le cas général, il faut donner une formule permettant de changer de variable indépendante sans recourrir aux méthodes spéciales employées dans la plupart des traîtés, par exemple dans ceux de Forsyth et de Heymann.

En 1886 L. Königsberger donna une méthode très générale que nous voulons appliquer à notre cas spécial[1].

Soit donné $y = f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$ une fonction des fonctions $\xi, \eta, \zeta \ldots$ d'une seule variable indépendante X. Nous définissons le symbole:

$$13) \quad \sum\nolimits^m N Q_1{}^{m_1} \ldots Q_n{}^{m_n}$$

en posant:

$$N = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} \cdot \frac{1}{(1!)^{m_1} \ldots (n!)^{m_n}}$$

tandis que $Q_r{}^{m_r}$ n'est autre chose que la puissance symbolique de l'expression:

$$Q_r = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{d^r \xi}{dX^r} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d^r \eta}{dX^r} + \ldots$$

et le signe $\sum^m$ se rapporte à tous les m qui satisfont à l'équation:

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n.$$

On forme les puissances symboliques en posant $\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$,

---

[1] *La démonstration donnée par l'illustre géomètre se trouve dans les Math. Ann. 1886.*

$\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$ tandis que les puissances des dérivées totales sont des véritables produits.

Cela posé on trouve la formule générale:

$$y_n = \sum\nolimits^m N Q_1^{m_1} \ldots Q_n^{m_n}$$

où on a posé $y_n = \frac{d^n y}{dX^n}$.

L'équation de condition:

$$m_1 + 2m_2 + \ldots nm_n = n$$

met en évidence les propriétés principales du symbole de Königsberger.

Ainsi on voit immédiatement que sous le signe $\sum$ on ne pourra trouver aucun terme contenant à la fois les quantités Q ayant tous les indices possibles de 1 jusqu'à n. Autrement, les m n'étant jamais négatifs et étant entiers, deviendront nuls dans certains termes. Si par exemple $m_n > 0$ donc $m_n \geqq 1$, on trouve $nm_n \geqq n$ et dans le terme correspondant tous les m depuis m_1 jusqu'à m_{n-1} inclusivement sont nuls, et vice versa, si $m_1 = n$, tous les m depuis m_2 jusqu'à m_n devront disparaître.

Nous allons maintenant décomposer la somme $\sum^m$ pour en obtenir une somme double. Nous posons $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$. Soit n le poids, k le degré des termes correspondants. On trouve facilement la condition $k \leqq n$ puisque $k = n$, si $m_1 = n = k$.

En décomposant la somme simple que nous pouvons ordonner par rapport aux termes de degré 1, 2, . . . n nous aurons:

$$y_n = \sum_1^n{}^k \sum^m N Q_1^{m_1} \ldots Q_n^{m_n}$$

avec deux équations de condition:

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n$$
$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k.$$

Il est bien facile d'appliquer la théorie générale au cas d'une seule variable auxiliaire, fonction de la variable indépendante X. Étant donné $y = f(x)$ où x est une fonction de X, on obtient immédiatement:

$$14)\quad Q_n{}^{m_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{d^r x}{dX^r}\right)^{m_r}.$$

Posons maintenant $r = 1, 2, \ldots n$ et formons le produit symbolique:

$$15)\quad Q_1{}^{m_1} \ldots Q_n{}^{m_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{m_n} x^{m_1} \ldots x_n{}^{m_n}$$

où $x_1 = \frac{dx}{dX}$, $x_2 = \frac{d^2x}{dX^2}$, ... et où $x_1{}^{m_1}$ est une véritable puissance tandis que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{m_n}$ n'est qu'une puissance symbolique. Nous aurons d'après la définition même:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{m_n} = \frac{\partial^k f}{\partial x^k} = \frac{d^k f}{dx^k} = y^{(k)}.$$

Avant de substituer cette dernière expression dans 13) nous posons encore:

$$16)\quad A_{nk} = \sum_m \frac{n!}{m_1!\,.\,.\,m_n!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{x_n}{n!}\right)^{m_n}$$

ce qui donne finalement:

$$17)\quad y_n = \sum_1^n{}_k A_{nk} y^{(k)}$$

formule équivalente au système:

	y'	y''	. . . .	$y^{(n)}$
y_1	A_{11}	0	. . . .	0
y_2	A_{21}	A_{22}	. . . .	
.		. . . . .		
.				
.		. . . . .		
y_n	A_{n1}	A_{n2}	. . .	A_{nn}

L'expression 16) offre une analogie évidente avec le développement d'un polynome. Soit donné $x = \varphi(X)$ une fonction synectique dans le contour donné, ρ une quantité arbitraire dont le module peut être pris aussi petit que l'on voudra.

Nous aurons donc:

$$18)\quad \varphi(X + \rho) - \varphi(X) = \frac{x_1}{1!}\rho + \ldots + \frac{x_n}{n!}\rho^n + \ldots .$$

et cette série de Taylor sera convergente.

Formons la puissance k = ième des deux membres, ce qui est permis et soit:

$$[\varphi(X + \rho) - \varphi(X)]^k = \Phi(\rho).$$

On pourra poser:

$$19)\quad \Phi(\rho) = \sum_m \frac{k!\ \rho^{m_1 + 2m_2 + \ldots . nm_n}}{m_1! \ldots m_n!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{x_n}{n!}\right)^{m_n}$$

ou encore:

$$\Phi(\rho) = A_1\rho + A_2\rho^2 + \ldots . + A_n\rho^n + \ldots .$$

Il est clair, que si nous posons simultanément:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$$
$$m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n$$

nous aurons:

$$A_n = \sum_m \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{x_n}{n!}\right)^{m_n} \frac{k!}{m_1! \ldots m_n!}.$$

La comparaison avec A_{nk} donne immédiatement:

$$A_{nk} = \frac{n!A_n}{k!}.$$

On voit que A_{nk} est, au facteur $\frac{n!}{k!}$ près, égal au coefficient de ρ^n dans le développement de

$$\Phi(\rho) = [\varphi(X + \rho) - \varphi(X)]^k.$$

Or nous pouvons trouver une expression générale du coefficient A_n. D'après la théorie connue de Cauchy, si l'on forme une nouvelle fonction $\frac{\Phi(\rho)}{\rho^{n+1}}$ ayant le pôle multiple $\rho^{n+1} = 0$, le résidu relatif à ce pôle sera égal à $\frac{1}{n!}\frac{d^n\Phi(\rho)}{d\rho^n}$. Mais ce même résidu est, comme on sait, égal au coefficient A_n de $\frac{1}{\rho}$ dans le développement:

$$\frac{\Phi(\rho)}{\rho^{n+1}} = \frac{A_1}{\rho^n} + \ldots . + \frac{A_n}{\rho} + \ldots$$

On aura donc:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n\Phi(\rho)}{d\rho^n}. \qquad [\rho = 0.]$$

D'ailleurs il est facile de prouver cette même formule en différenciant les deux membres de l'égalité:

$$\Phi(\rho) = A_1\rho + \ldots + A_n\rho^n + \ldots .$$

successivement n fois par rapport à ρ, posant ensuite $\rho = 0$ et divisant par $n!$

D'après ce qu'on a trouvé plus haut, on aura donc finalement:

$$A_{nk} = \frac{1}{k!}\frac{d^n}{d\rho^n}[\varphi(X + \rho) - \varphi(X)]^k, \qquad [\rho = 0]$$

formule connue de Hoppe, Meyer et Schlömilch, qui y sont arrivés par une voie tout à fait différente.

Nous voulons maintenant établir une formule récurrente applicable au symbole général:

$$y_n = \sum{}_m N Q_1^{m_1} \ldots Q_n^{m_n}.$$

Soit $(Q_1)_1 = Q_2$ la dérivée symbolique de Q_1. On trouve:

$y_1 = Q_1$

$y_2 = Q_1^2 + Q_2 = Q_1 y_1 + (Q_1)_1$

$y_3 = Q_1^3 + 3Q_1Q_2 + Q_3 = (Q_1^2 + Q_2)_1 + Q_1(Q_1^2 + Q_2)$ ou bien:

$y_3 = (y_2)_1 + y_2 y_1$.

On aura généralement:

$$y_{k+1} = (y_k)_1 + y_k y_1.$$

On peut désigner l'opération: $(y_k)_1 + y_k y_1$ par le signe I et on aura:

$$y_1 = Q_1$$
$$y_1^{\mathrm{I}} = y_2 = Q_1^2 + Q_2$$
$$y_1^{\mathrm{II}} = y_3 = Q_1^3 + 3Q_1Q_2 + Q_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On trouve des formules analogues dans le cas où y_2, y_3 . . . . sont des dérivées symboliques et Q_1, Q_2 . . . des véritables dérivées, ce qu'on verra tout de suite.

Soit $\frac{dx}{dX} = x_1$, $\frac{dx_1}{dX} = x_2$ . . . ., $\frac{x_2}{x_1} = L_1$, $\frac{dL_1}{dX} = L_2$ . . . .

Dans ce cas L_1 est la dérivée logarithmique de x_1, L_2 la dérivée seconde etc., donc x_1, x_2 . . . et L_1, L_2 . . . sont des véritables dérivées. Mais on peut ici considérer $\frac{x_3}{x_1}$ comme une dérivée symbolique de $\frac{x_2}{x_1}$ etc.

Soit $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda_k$ on voit que λ_k est, d'après la définition même, la dérivée symbolique de λ_{k-1}. On trouve:

$$\lambda_1 = \frac{x_2}{x_1} = L_1$$

$$\lambda_2 = \frac{x_3}{x_1} = L_2 + {L_1}^2$$

$$\lambda_3 = \frac{x_4}{x_1} = L_3 + 3L_1L_2 + {L_1}^3$$

. . . . . .

et généralement:

$$23)\quad \lambda_n = \frac{x_{n+1}}{x_1} = \sum_m \frac{n!}{m_1! \ldots m_n!} \left(\frac{L_1}{1!}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{L_n}{n!}\right)^{m_n}$$

formule applicable à la théorie des »réciprocants« de M. Sylvester.

Il est très facile de trouver la formule inverse qui donne L_k quand on connaît $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$. Cette formule ne diffère de 23) que d'un facteur numérique commun multipliant tous les termes de degré donné. En échangeant λ avec L il ne faudra donc que multiplier tous les termes du degré k en λ par le facteur $(-1)^{k-1}(k-1)!$ On trouve par exemple:

$$L_3 = \lambda_3 - 3\lambda_1\lambda_2 + 2{\lambda_1}^3 = \frac{x_4}{x_1} - \frac{3x_2x_3}{{x_1}^2} + \frac{2{x_2}^3}{{x_1}^3}$$

et ainsi de suite.

Nous allons montrer maintenant une méthode pratique pour calculer effectivement les coefficients A_{nk}. On connaît a priori la partie littérale de A_{nk} puisqu'il suffit d'écrire toutes les combinaisons possibles $\sum {x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2} \ldots {x_n}^{m_n}$ de degré k et de poids n. Si nous posons ${x_1}^2x_3 = (1^23)$ etc., nous pourrons écrire:

$$24)\quad A_{nk} = \left\{ \begin{array}{ll} 1^{k-1} & n-k+1 \\ 1^{k-2} & 2\ n-k \\ 1^{k-2} & 3\ n-k-1 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 2^{k-1} & n-2k+2 \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array} \right\}$$

où le signe $\equiv$ montre que l'égalité n'est établie qu'à des facteurs numériques près.

Nous pouvons démontrer que:

$$25)\quad A_{nn-k} \equiv \binom{n-2k}{1} A_{2k,k},$$

si $n > 2k$. Si $n < 2k$ on a $n-2k < 0$ et la formule n'aura plus de sens.

Pour démontrer 25) il suffit d'appliquer 24). On trouve:

$$A_{nn-k} \equiv \begin{pmatrix} n-k-1 & & \\ 1 & k+1 & \\ n-k-2 & & \\ 1 & 2 & k \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$A_{2k,k} \equiv \begin{pmatrix} k-1 & & \\ 1 & k+1 & \\ k-2 & & \\ 1 & 2 & k \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

et l'égalité 25) devient évidente.

Ainsi on a: $A_{4,2} = 4x_1x_3 + 3x_2^2$

$$A_{6,4} \equiv \binom{2}{1} A_{4,2}$$

et la partie littérale de $A_{6,4}$ doit être $x_1^3x_3$, $x_1^2x_2^2$.

En calculant les facteurs numériques d'après la formule:

$$N = \frac{n!}{m_1! \ldots m_n! \, (1!)^{m_1} \ldots (n!)^{m_n}}$$

on trouvera facilement:

$$A_{6,4} = 20x_1^3x_3 + 45x_1^2x_2^2.$$

Pour écrire la partie littérale de $A_{100,97}$ on écrira $\binom{94}{1} A_{6,3}$ et on trouvera $x_1^{96}x_4$, $x_1^{95}x_2x_3$, $x_1^{94}x_2^3$, où il ne faudra qu'ajouter les coefficients numériques N.

Pour éviter des erreurs, il ne faudra jamais décomposer le symbole en facteurs, puisqu'on a par exemple $\binom{n-3}{1} = \frac{1}{n-3}\binom{n-4}{1\ 1}$. Si l'on veut calculer A_{nn-2}, on écrira d'abord:

$$A_{nn-2} \equiv \binom{n-4}{1} A_{4,2} \equiv \binom{n-3}{1\ 3}, \binom{n-4\ 2}{1\ 2}$$ ce qui donne:

$$A_{nn-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{24} x_1^{n-4}[4x_1x_2 + 3(n-3)x_2^2],$$

tandis que si l'on calcule sans aucune précaution en écrivant $\binom{n-4}{1} A_{4,2} \equiv \binom{n-4}{1\ 1\ 3}, \binom{n-4}{1\ \ 2}$, on trouvera pour le premier membre une valeur trop grande qu'il faudra diviser par $n-3$.

IV.

Soit maintenant donnée une équation différentielle linéaire homogène:

$$26)\quad P_0Y_n + (n)_1P_1Y_{n-1} + \ldots + P_nY_0 = 0$$

où $P_0 = 1$ et $Y_k = \frac{d^kY}{dY^k}$; $P_1, P_2 \ldots, P_n$ sont des fonctions synectiques de X dans un contour donné.

Pour effectuer la substitution $Y = U_0y$ sans changer de variable indépendante on pourrait appliquer la méthode de Lagrange. Mais nous allons donner une méthode plus expéditive.

Nous écrirons le premier terme de l'équation 26) symboliquement:

$$(P + Y)_n$$

en développant cette expression d'après la formule de binome.

Nous définissons d'une manière analogue:

$$\omega_k = (P + U)_k = P_0U_k + (k)_1P_1U_{k-1} + \ldots + P_kU_0,$$

en posant $k \leqq n$, $U_k = \frac{d^kU}{dX^k}$.

Voici maintenant l'énoncé du théorème que nous voulons établir:

Le résultat de la substitution: $Y = U_0y$ dans $(P + Y)_n$ sans changer de variable indépendante, n'est autre chose que le symbole:

$$27)\quad (\omega + y)_n,$$

où l'on a posé $y_k = \frac{d^ky}{dX^k}$.

Pour démontrer ce théorème remarquons d'abord que le symbole $(P + Y)_n$ après la substitution $Y = U_0y$ donnera:

$$28)\quad (P + Y)_n = (P + Uy)_n$$

si l'on pose identiquement $U = U_0$.

L'identité 28) est en effet la conséquence immédiate de la définition du symbole $(P + Y)_n$ est de la formule de Leibnitz: $(Uy)_k = (U + y)_k$.

Ce que nous voulons prouver, c'est l'identité:

$$[P + (U + y)]_n = [(P + U) + y]_n.$$

Cette identité semble être évidente; mais il ne faut pas oublier que dans le premier membre P est le coefficient du symbole et $U + y$ son argument, tandis que dans le second membre $P + U$ est le coefficient et y l'argument. Les indices des coefficients n'étant nullement analogues aux indices de dérivation, la formule que nous voulons établir doit être démontrée. Il suffit de développer le second membre, ce qui donne: $(P + U)_n y_0 + (n)_1 (P + U)_{n-1} y_1 + \ldots + (P + U)_0 y_n = \omega_n y_0 + \ldots = (\omega + y)_n$.

Mais le premier membre donne:

$[P + (U + y)]_n = P_0 (U + y)_n + (n)_1 P_1 (U + y)_{n-1} + \ldots + P_n (U + y)_0$.

Développons et ordonnons par rapport à y, nous obtiendrons:

$$\begin{array}{r|l}
P_0 & U_n y_0 + (n)_1 U_{n-1} y_1 + \ldots + U_0 y_n \\
(n)_1 P_1 & U_{n-1} y_0 + (n-1)_1 U_{n-2} y_1 + \ldots + U_0 y_{n-1} \\
(n)_2 P_2 & U_{n-2} y_0 + (n-2)_1 U_{n-3} y_1 + \ldots + U_0 y_{n-2} \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Mais on a généralement:

$$(n)_{k_1} (n-k_1)_{k_2} (n-k_1-k_2)_{k_3} \ldots = \frac{n!}{(n-k_1-k_2-k_3 \ldots)! k_1! k_2! k_3! \ldots}$$

Ce qui donne: $(n)_2 (n-2)_1 = n(n-1)_2$ etc. On trouve:

$$\begin{array}{r|l}
P_0 U_n & y_0 \\
(n)_1 P_1 U_{n-1} & \\
\ldots & + \ldots \\
(n)_1 P_{n-1} U_1 & \\
P_n U_0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
P_0 U_{n-1} & (n)_1 y_1 \\
(n-1)_1 P_1 U_{n-2} & \\
\ldots & + \ldots \\
P_{n-1} U_0 &
\end{array}$$

et cette expression n'est autre chose que $(P + U)_n y_0 + \ldots = [(P + U) + y]_n$.

On a donc successivement:

$$(P + Uy)_n = [P + (U + y)]_n = [(P + U) + y]_n = (\omega + y)_n \text{ c. q. f. d.}$$

Ce théorème permet de démontrer d'une manière très simple plusieurs théorèmes classiques. Ainsi si l'on veut faire disparaître le terme contenant $\frac{d^{n-1} y}{dX^{n-1}} = y_{n-1}$ il suffira évidemment de poser $\omega_1 = 0$ ou, d'après la

définition de ω, $U_1 + P_1 U_0 = 0$, donc il faudra poser $\frac{Y}{y} = U_0 = e^{-\int P_1 dX}$ pour obtenir la transformée dans la forme voulue. Un autre théorème bien connu s'obtient si l'on pose $\omega_n = 0$ ou $(P + U)_n = 0$. Dans ce cas on obtient la transformée $\omega_0 y_n + (n)_1 \omega_1 y_{n-1} + \ldots + \omega_{n-1} y_1 = 0$ ou bien en posant $y_1 = z_0$, la transformée:

$$\omega_0 z_{n-1} + (n)_1 \omega_1 z_{n-2} + \ldots + \omega_{n-1} z = 0$$

ce qui est une équation de $n-1$ = ième ordre etc. etc.

La formule $(P + Y)_n = (\omega + y)_n = 0$ contient aussi toute la théorie des solutions »égales«: Il suffit de poser $Y = \eta_0 X^\lambda$ pour obtenir la transformée $(\omega + X^\lambda)_n = 0$ avec $\omega_k = (P + \eta)_k$. On aura donc: $(\omega + X^\lambda)_n = \omega_n X^\lambda + a_1 \omega_{n-1} X^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda \omega_{n-\lambda}$ puisque $(X^\lambda)^{(\lambda+1)} = 0$. Les coefficients $a_1, \ldots, a_\lambda$ sont des quantités numériques dont nous n'avons pas à nous occuper. Si η_0 et $\eta_0 X^k$ sont simultanément des solutions de $(P + Y)_n = 0$, l'équation $(\omega + X^k)_n = 0$ $= (P + \eta_0 X^k)_n = 0$ sera vérifiée identiquement pour toute valeur de X; on a donc $\omega_n = 0, \ldots, \omega_{n-\lambda} = 0$. En posant $\lambda = 1, 2, \ldots \ldots n-1$ on retrouve le théorème connu, en remarquant que ω_k est égale à un facteur numérique près à la dérivée symbolique ${}^{(n-k)}\omega_n$ de Lagrange. On a effectivement:

$$\omega_k = \frac{{}^{(n-k)}\omega_n}{n(n-1) \ldots (k+2)(k+1)}.$$

On voit que nos fonctions ω_k jouent absolument le même rôle, que les dérivées symboliques de Lagrange, avec cette différence, que la méthode de Lagrange introduit des facteurs tout à fait superflus qui proviennent de la différentiation, tandis que notre méthode permet de former les fonctions ω_k sans calcul.

V.

Effectuons maintenant la substitution complète (U_0, x_1). La substitution $(U_0, 1)$ transforme l'équation $(P + Y)_n = 0$ en $(\omega + y)_n = 0$ avec la même variable indépendante X.

D'autre part la théorie des dérivées des »fonctions de fonctions« nous a donné le système:

	y'	y''	y'''	. . . .
y_1	A_{11}	0	0	. . . .
y_2	A_{21}	A_{22}	0	. . . .
y_3	A_{31}	A_{32}	A_{33}	. . . .
. .	. . . . .			

Formons maintenant le triangle symbolique:

29)

	y	y'	. . .	$y^{(n)}$
ω_0	0	$(n1)$	. . .	(nn)
$(n)_1\omega_1$	0	$(n-11)$	. ,	
.	. . . . . ,			
.	. . . . . ,			
.	. . . . . ,			
.	. . . . . ,			
$(n)_1\omega_{n-1}$	0	(11)		
ω_n	1			

où $(ki) = A_{ki}$, $A_{ko} = 0$, ... , $A_{10} = 0$, $A_{00} = 1$. Nous disons que 29) est la transformée obtenue en appliquant la substitution (U_0, x_1) à $(P + Y)_n = 0$, si l'on multiplie tout élément du triangle par ω et y avec leurs indices et des coefficients qui appartiennent à chaque colonne et à chaque ligne. Ainsi y' multiplie tous les éléments de la deuxième colonne, $(n)_1\omega_1$ est le facteur de tous les éléments de la deuxième ligne etc.

Ce théorème est presque évident, puisqu'on a: $y_k = \sum_{o}^{k} A_{kr} y^{(r)}$ ce qu'on savait déjà, et la substitution de cette valeur dans $(\omega + y)_n = \omega_n y_0 + (n)_1\omega_{n-1}y_1 + \ldots \omega_0 y_n$ donne évidemment une somme double équivalente au triangle symbolique 29).

Si l'on veut par exemple écrire la transformée de l'équation $\frac{d^3Y}{dX^3} + 3P_1\frac{d^2Y}{dX^2} + 3P_2\frac{dY}{dX} + P_3Y = 0$, on écrira:

	y^0	y'	y''	y'''
ω_0	0	(31)	(32)	(33)
$3\omega_1$	0	(21)	(22)	
$3\omega_2$	0	(11)		
ω_3	1			

et on lira cette formule comme il suit:

$$0 = y \begin{vmatrix} \omega_3 + y' & \omega_0 A_{31} + y'' & \omega_0 A_{32} + y''' & \omega_0 A_{33} \\ & 3\omega_1 A_{21} & 3\omega_1 A_{22} & \\ & 3\omega_2 A_{11} & & \end{vmatrix}.$$

Il suffit maintenant de calculer: $A_{11} = x_1$, $A_{21} = x_2$, $A_{22} = x_1^2$, $A_{31} = x_3$, $A_{32} = 3x_1x_2$, $A_{33} = x_1^3$ ce qu'on trouve immédiatement en appliquant le symbole I (Ch. III) puisqu'on a symboliquement:

$$x_1^{\mathrm{I}} = x_2 + x_1^2$$
$$x_1^{\mathrm{II}} = x_3 + 3x_1x_2 + x_1^3.$$

Enfin il faut substituer les valeurs des fonctions ω:

$$\omega_3 = U_3 + 3P_1U_2 + 3P_2U_1 + P_3U_0$$
$$\omega_2 = U_2 + 2P_1U_1 + P_2U_0$$
$$\omega_1 = U_1 + P_1U_0$$
$$\omega_0 = U_0$$

et on obtient le résultat:

$$U_0x_1^3y''' + 3[U_0x_1x_2 + (U_1 + P_1U_0)x_1^2]y'' + y'[U_0x_3 + 3(U_1 + P_1U_0)x_2 + 3(U_2 + 2P_1U_1 + P_2U_0)x_1] + y[U_3 + 3P_1U_2 + 3P_2U_1 + P_2U_0] = 0$$

qui coïncide avec celui obtenu précédemment par une autre voie.

Nous allons maintenant déterminer la relation qui existe entre les coefficients de la transformée et ceux de la proposée. Introduisons le symbole $(A_{0s} + \omega)_n$ en posant: $A_{ks} = 0$, si $k < s$. On a donc:

$$(A_{0s} + \omega)_n = A_{ns}\omega_0 + (n)_1A_{n-1s}\omega_1 + \ldots + (n)_sA_{ss}\omega_{n-s}.$$

Le second indice est donc constant.

Un coup d'œil sur la formule 29) nous montre que $U_0x_1^n(n)_sp_s$ n'est autre chose que le symbole $(A_{0n-s} + \omega)_n$, puisque les deux expressions sont égales au coefficient de $y^{(n-s)}$ dans la transformée (avant la division par $U_0x_1^n$ qui fait égaler le coefficient de $y^{(n)}$ à 1). Nous avons donc obtenu l'expression:

$$30)\quad (n)_sU_0x_1^np_s = (A_{0n-s} + \omega)_n.$$

On peut donner à cette expression une forme un peu différente qui met en évidence les relations qui existent entre les P et les p. On a:

$$(A_{0n-s} + \omega)_n = [A_{0n-s} + (P + U)]_n = [(A_{0n-s} + U) + P]_n = (A_{0n-s} + U)_n + (n)_1(A_{0n-s} + U)_{n-1}P_1 + \ldots + (n)_sA_{n-sn-s}\,U_0P_s.$$

Posons maintenant: $(A_{0n-s} + U)_k = \psi_k$. Nous aurons:

$$31)\quad (n)_sU_0x_1^np_s = (\psi + P)_n = \psi_n + (n)_1\psi_{n-1}P_1 + \ldots + (n)_s\psi_{n-s}P_s.$$

On voit donc que p_s est une fonction linéaire non homogène (puisque $P_0 = 1$) de P_1, P_2 . . . . P_s.

La formule 31) peut être transformée en posant:

$$p_s = \frac{A_{n-sn-s}P_s}{{x_1}^n} + R_{s-1}$$

où R_{s-1} est une fonction linéaire de P_1. . . . P_{s-1}.

Mais puisqu'on a: $A_{n-sn-s} = {x_1}^{n-s}$, on obtient l'expression suivante:

$$32)\ p_s = \frac{P_s}{{x_1}^s} + R_{s-1}.$$

Différentions cette formule r-fois par rapport à X en écrivant dans le premier membre $x_1\frac{d}{dx}$ au lieu de $\frac{d}{dX}$. Nous obtiendrons:

$$\frac{d^r p^s}{dx^r} = \alpha_{rr}\frac{d^r p_s}{dX^r} + \sum_1^{k-1}\alpha_{rk}\frac{d^k p_s}{dX^k}.$$

Mais d'après la théorie des fonctions de fonctions $\alpha_{rr} = \left(\frac{1}{x_1}\right)^r$ et on obtient finalement:

$$33)\ \frac{d^r p_s}{dx^r} = \frac{1}{{x_1}^{r+s}}\frac{d^r P_s}{dX^r} + R_{s+r-1},$$

où R_{s+r-1} est le reste composé linéairement de P_1, P_2, . . . P_s et leurs dérivées jusqu'à $P_s^{(r)}$ exclusivement. Les formules 32) et 33) sont dûes à Halphen. Nous définissons d'après Halphen la dimension de la fonction $\frac{d^r P_s}{dX^r}$, cela veut dire la somme des indices des coefficients et des indices de dérivation. La dimension de $P_s^{(r)}$ est donc égale à $s + r$. D'après cela on voit que les plus hautes dimensions des termes de R_{s-1} et de R_{s+r-1} sont respectivement égales à $s-1$ et $s + r-1$, puisque R_{s-1} ne contient pas P_s etc.

Les formules 32) et 33) permettent d'établir le théorème important sur la homogénéité des invariants. L'énoncé est bien simple: tout invariant est une fonction homogène quant à la dimension. Halphen a donné une démonstration de ce théorème, mais sa discussion nous semble insuffisante. (Acta Math. 1883 et Grand Prix de 1884.) L'illustre géomètre ne prouva effectivement que l'existence des invariants absolues homogènes et de degré zéro. Mais il est facile de compléter

cette démonstration, en suivant l'analogie que nous offre l'Algèbre. Pour discuter les invariants des formes binaires on effectue la substitution connue :

	x	y
X	1	0
Y	0	λ

qui prouve la loi de homogénéité.

Dans notre cas nous poserons:

$$34)\quad Q_s + Q_{s-1} + \ldots = x_1{}^{\alpha}(q_s + q_{s-1} + \ldots),$$

où Q_s est l'ensemble des membres de dimension s etc. composés des coefficients P et de leurs dérivées.

Nous allons démontrer qu'un tel invariant composé des parties hétérogènes ne saurait exister.

D'après la définition des invariants l'équation 34), si elle peut donner un invariant, doit subsister identiquement quelque soit le module x_1, si ce dernier reste synectique et différent de zéro dans le contour donné. Posons donc $x_1 = a$ où a est une constante différente de zéro. Nous pouvons aussi bien poser $x_1 = \frac{1}{a}$ et l'équation 34) doit être vérifiée. Posons encore $U_0 = \frac{Y}{y} = 1$ ce qui donnera $U_1 = 0$, $U_2 = 0 \ldots$. On trouve dans ce cas:

$$35)\quad p_s = P_s a^s.$$

$$36)\quad \frac{d^r p_s}{dx^r} = \frac{d^r P_s}{dX^r} a^{r+s}.$$

En substituant ces valeurs, nous aurons:

$$Q_s + Q_{s-1} + \ldots = x_1{}^{\alpha}(q_s + q_{s-1} + \ldots) = x_1{}^{\alpha}(Q_s a^s + Q_{s-1}a^{s-1} + n)$$
$$= a^{-\alpha}(Q_s a^s + Q_{s-1}a^{s-1} + \ldots).$$

On a donc séparément: $Q_s = Q_s a^{s-\alpha}$

$$Q_{s-1} = Q_{s-1}a^{s-\alpha-1},$$

ou bien: $1 = a^{s-\alpha}$, $1 = \alpha^{s-\alpha-1}$, ... résultat absurde, puisque l'égalité $s-\alpha = s-\alpha-1$ est impossible. Or Q_s n'est pas nul d'après la définition, Q_s étant l'ensemble des termes de la plus haute dimension. Donc Q_{s-1}, Q_{s-2} . . . sont nuls et l'invariant ne peut avoir que la forme:

$Q_s = x_1{}^s q_s$ puisqu'on a $1 = a^{s-\alpha}$ cela veut dire $s = \alpha$.

Nous avons donc démontré que tout invariant est homogène quant à la dimension et que la dimension d'un invariant est mesurée par l'exposant de la puissance du module qui multiplie l'invariant transformé.

Parmi les invariants connus, les plus importants sont ceux, dont une partie est composée linéairement des coefficients et de leurs dérivées. M. Forsyth (Philos. Trans. 1888) a trouvé que cette partie est indépendante de l'ordre de l'équation. En suivant l'exemple du géomètre anglais nous voulons appeler les invariants ainsi définis invariants primitifs. Il n'existe cependant aucune démonstration rigoureuse permettant d'affirmer que ces invariants sont les seuls qui ne dérivent pas des autres.

VI.

Nous allons maintenant considérer les formes canoniques. Au moyen de la substitution connue $\frac{Z}{Y} = e^{-\int R dX}$ nous pouvons transformer la proposée $(R + Z)_u = 0$ de manière à faire disparaître le terme de $n - 1 =$ ième ordre. L'équation transformée $(P + Y)_n = 0$; $[P_0 = 1, P_1 = 0]$ sera ce qu'on appelle la forme normale.

Effectuons maintenant la substitution générale (U_0, x_1). La nouvelle transformée $(p + y)_n = 0$ ne se présentera pas généralement sous une forme normale. On sait que p_s est une fonction linéaire, mais non homogène de P_1, P_2, . . P_s, donc p_1 est une fonction linéaire non homogène de P_1. On aura effectivement: $nU_0 x_1{}^n p_1 = \psi_n + (n)_1 P_1 \psi_{n-1} = \psi_n$, si $P_1 = 0$, mais ψ_n est généralement différent de zéro.

Si l'on veut cependant avoir la transformée sous la forme normale, il faudra poser $\psi_n = 0$. Or d'après la définition des fonctions ψ on aura:

$$37)\ \psi_n = A_{nn-1} U_0 + (n)_1 A_{n-1n-1} U_1 = 0.$$

Cette condition est donc nécessaire et suffisante pour transformer au moyen de la substitution (U_0, x_1) la forme normale $(P_1 = 0)$ dans une forme normale nouvelle $(p_1 = 0)$. La formule 25) donne:

$$A_{nn-1} = (n)_2 x_1{}^{n-2} x_2;\ A_{n-1n-1} = x_1{}^{n-1}.$$

Nous avons donc:

$$38)\quad \frac{U_1}{U_0} = -\frac{n-1}{2}L_1$$

où l'on a posé $\frac{d\log x_1}{dX} = L_1$.

Il est clair, que l'équation différentielle de 1 ordre 38) admet une solution $U_0 = x_1^{-\frac{n-1}{2}}$.

On a vu que dans le cas général $U_0 = \frac{Y}{y}$ était une fonction indépendante du module x_1. Il n'en est pas ainsi dans notre cas actuel.

Il nous sera maintenant très facile de calculer un invariant remarquable, qu'on pourrait appeler invariant fondamental et qui a été trouvé par Brioschi dans le cas spécial où $n = 3$ ou 4. Halphen a prouvé que cet invariant ne dépend nullement de l'ordre de l'équation. Nous suivrons une méthode analogue à celle qui a été choisie par Brioschi et par Forsyth, ayant soin de simplifier les calculs au moyen de nos formules de transformation.

Calculons A_{nn-2}, A_{n-1n-2}, . . ., A_{n-3n-3} d'après la formule 25) ce qui donne par exemple $A_{nn-3} = \begin{pmatrix} n-4 \\ 1 \quad 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-5 \\ 1 \quad 2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-6\ 3 \\ 1 \quad 2 \end{pmatrix}$.

La formule 30) donnera alors:

$$(n)_2 U x_1^{\,n} p_2 = \omega_0 A_{nn-2} + n\omega_1 A_{n-1n-2} + (n)_2 \omega_2 A_{n-2n-2}.$$

Ou bien: $(n)_2 x_1^{\,2} p_2 = \dfrac{\begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \quad 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-4\ 2 \\ 1 \quad 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix}} + n\frac{U_1}{U_0}\dfrac{\begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \quad 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix}} +$

$(n)_2(P_2 U_0 + U_2)$ ou enfin, en posant $\lambda_1 = \frac{x_2}{x_1} = L_1$; $\lambda_2 = \frac{x_3}{x_1} = L_1^{\,\mathrm{I}} = L_2 + L_1^{\,2}$:

$(n)_2 x_1^{\,2} p_2 = \frac{n-2}{12}[4L_2 + (3n-5)L_1^{\,2}] + (n-2)u_1 L_1 + P_2 u_2$ où on a écrit $\frac{U_k}{U_0} = u_k$. Or on a:

$$u_1 = -\frac{n-1}{2}L_1,\ u_1^{\,\mathrm{I}} = u_2 = -\frac{n-1}{2}L_2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 L_1^{\,2} \text{ etc.}$$

Ce qui donne:

$$39)\quad \frac{n+1}{12}(2L_2 - L_1^{\,2}) = P_2 - p_2 x_1^{\,2}.$$

En calculant $\lambda_3 = \frac{x_4}{x_1} = L_3 + 3L_1L_2 = {L_1}^3$, ${u_1}^{II} = u_3$ etc. on obtient encore:

$$40)\quad L_3 - 3L_1L_2 + {L_1}^3 = \frac{4}{n+1}(P_3 - p_3{x_1}^3) - \frac{12}{n+1}P_2L_1.$$

Il suffit maintenant d'éliminer les variables auxiliaires L pour obtenir une relation invariante entre les P et les p.

Différentions pour cela 39) en écrivant $x_1\frac{dp_2}{dx}$ au lieu de $\frac{dp_2}{dX}$ etc. Nous aurons:

$$41)\quad L_3 - L_1L_2 = \frac{6}{n+1}[({P_2}' - p_2{x'_1}^3) - \frac{12}{n+1}p_2x_1x_2].$$

La différence de 41) et de 40) donne:

$$\frac{12L_1}{n+1}(P_2 - p_2{x_1}^2) = \frac{1}{n+1}[6({P_2}' - {p_2}'{x_1}^3) - 4(P_3 - p_3{x_1}^3) - 12p_2x_1x_2 + 12P_2L_1].$$

On a donc:

$$[6({P_2}' - {p_2}'{x_1}^3) - 4(P_3 - p_3{x_1}^3) - 12p_2x_1x_2] = -12L_1{x_1}^2p_2.$$

Or $L_1{x_1}^2 = x_1x_2$. On a donc finalement:

$$3({P_2}' - {p_2}'{x_1}^3) - 2(P_3 - p_3{x_1}^3) = 0.$$

Ou ce qui est la même chose:

$$42)\quad 3\frac{dP_2}{dX} - 2P_3 = {x_1}^3(3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3).$$

Donc $3\frac{dP_2}{dX} - 2P_3$ est un invariant de l'équation normale indépendant de l'ordre n et ayant la dimension égale à 3.

Cet invariant est donc propre à l'équation genérale de n = ième ordre. Il ne faut exclure que les cas $n = 1$, $n = 2$. Pour $n = 1$ il est évident puisqu'on a $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ que l'équation 43) se réduit à $0 = 0$. Pour l'équation du second ordre la chose est moins simple. Nous démontrerons plus tard que l'équation du second ordre n'a que des invariants identiquement nuls cela veut dire qu'elle n'a pas d'invariants. Mais pour le cas spécial de l'invariant $3\frac{dP_2}{dX} - 2P_3 = V_3$, on peut démontrer directement que V_3 n'est pas un invariant, si l'équation n'est que du second ordre.

Remarquons d'abord, que la relation invariante:

$$V_3 = x_1{}^3 v_3,$$

où $v_3 = 3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3$, a été trouvée comme une conséquence immédiate des formules 39) et 41) dont nous avons éliminé les variables auxiliaires L. Dans le cas $n = 2$ la relation 39) donne: $\frac{1}{4}(2L_2 - L_1{}^2) = P_2 - p_2 x_1{}^2$ ce qui est parfaitement exact. Mais l'équation 40) qui nous a donné 41) se réduira à $L_3 - 3L_2L_1 + L_1{}^3 = -4P_2L_1$, P_3 étant nul, et comme $L_1 = \frac{x_2}{x_1}$ on voit que pour remplir la condition 40) il faudra poser P_2 égal à une fonction donnée du module et vice versa P_2 étant donné cette relation ne sera pas vérifiée que pour une valeur spéciale du module qui dépend de P_2.

Autrement dit la relation invariante $V_3 = x_1{}^3 v_3$ ne sera pas exacte que pour un module spécial, donc V_3 n'est pas un invariant proprement dit.

On vérifie cette conclusion en remarquant que P_3 étant nul la relation $V_3 = x_1{}^3 v_3$ se réduit à $\frac{dP_2}{dp_2} = \left(\frac{dX}{dx}\right)^2$. Or cette équation ne saurait être identique pour toute valeur de x que dans le cas $X = x$, $Y = y$, $P_2 = p_2$. Mais dans ce cas la relation $V_3 = V_3$ ne pourra pas définir un invariant.

Si au contraire on rejette l'équation 40) qui contient P_3, on vérifiera immédiatement que la condition unique 39) ne pourra pas donner lieu à un invariant, puisque l'équation $p_2 x_1{}^2 = P_2 - \frac{1}{4}(2L_2 - L_1{}^2)$ différentiée une fois donne une relation dont on ne pourra pas éliminer les quantités L_1, L_2.

Enfin, la relation $\frac{dP_2}{dX} = x_1{}^3 \frac{dp_2}{dx}$ sera identique dans le cas où P_2 et p_2 sont des constantes quelconques, mais l'identité $0 = 0$ ne peut pas définir un invariant.

La même méthode qui nous a permis à calculer l'invariant V_3 pourrait servir pour trouver tous les invariants »primitifs«. Il suffit de calculer p_4, p_5 . . . . p_n d'après les formules générales, de former ensuite les quantités L_1, L_2, L_3 . . . ., u_1, u_2, u_3 . . . et les dérivées symboliques $L_1{}^{\mathrm{I}}$, $L_1{}^{\mathrm{II}}$, $L_1{}^{\mathrm{III}}$ . . . . et d'éliminer les quantités auxiliaires.

On voit a priori que ces calculs seraient bien compliqués. Il est donc préférable de donner une méthode qui n'exige que le calcul des coefficients numériques. Or le principe de homogénéité donne le moyen d'écrire immédiatement la partie littérale d'un invariant promitif étant donné le nombre égal à sa dimension. Malheureusement il n'existe qu'une méthode bien incomplète pour définir a priori toutes les combinaisons possibles. Commençons par remarquer que les combinaisons qui entrent dans le symbole $\sum_m N Q_1^{m_1} \ldots Q_n^{m_n}$ ne forment qu'une partie des combinaisons dont la dimension est égale à n, puisque »le poids« n'est qu'un cas spécial de la »dimension«.

Soit k le degré, S le poids d'une somme:

$$\sum_m N B_0^{m_0} B_1^{m_1} \ldots B_n^{m_n}$$

où l'on a écrit B au lieu de Q pour désigner que tous les termes de cette somme sont de même degré k et où on a introduit B_0 de manière à avoir:

$$m_0 + m_1 + \ldots + m_n = k$$
$$m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = S.$$

Soit $(S : n, k)$ le symbole désignant le nombre de combinaisons des k nombres entiers non négatifs, dont la somme est égale à S, ces nombres étant pris dans la série 0, 1, 2, . . n, et quelques uns d'entre eux pouvant être égaux. On trouve alors d'après Euler: $(S : n, k) =$ au coefficient de $z^k x^S$ dans le développement de la fonction génératrice:

$$\frac{1}{(1 - z)(1 - zx) \ldots (1 - zx^n)}$$

suivant les puissances ascendantes de z.

Le problème analogue de la définition du nombre des combinaisons dont la dimension est un nombre donné, est encore plus compliqué. Dans la pratique on formera toutes les combinaisons possibles d'après la règle suivante. On écrira d'abord toutes les combinaisons dont le poids est par exemple égal à 6; puis on écrira les mêmes combinaisons sauf P_6 et on effectuera toutes les permutations possibles entre les indices des coefficients et ceux qui proviennent de la différentiation. Soit par exemple la dimension $s = 6$. On écrira d'abord:

P_6, P_5P_1, etc. les termes de poids 6 ce qu'on fait très vite en écrivant 6 au lieu de P_6 etc. de la manière suivante:

$$\begin{pmatrix} 11112 & 24 \\ 1113 & 33 \\ 114 & 15 \\ 123 & 6 \\ 222 & \end{pmatrix}$$

Dans le cas où $P_1 = 0$ (forme normale) ces combinaisons se réduisent à (222), (24), (33), (6) cela veut dire à P_2^3, P_2P_4, P_3^2, P_6.

On écrira ensuite (15) ayant soin de permuter de manière à avoir P_1^{V} et P_5'; de la même manière on écrira (24) et on obtiendra P_2^{IV} et P_4'' etc. Dans le cas $P_1 = 0$ on n'aura finalement que douze combinaisons et la partie littérale de l'invariant de dimension 6 aura la forme générale:

$a_1P_6 + a_2P_5' + a_3P_4'' + a_4P_3''' + a_5P_2^{IV} + a_6P_3^2 + a_7P_3P_2' + a_8(P_2')^2 + a_9P_2P_4 + a_{10}P_3'P_2 + a_{11}P_2^3 + a_{12}P_2''P_2$ où les a sont des coefficients numériques qu'il faudra déterminer.

Remarquons que le nombre des termes d'un invariant est toujours fini. La dimension s étant finie, supposons d'abord qu'il ne s'agit que des termes du poids s. Or le nombre de ces derniers est essentiellement fini, puisqu'on peut démontrer qu'il est inférieur à une quantité finie.

On démontre facilement que le nombre ε des quantités m entiers et positifs qui vérifient les deux équations:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$$
$$m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = s$$

est inférieur à $E\left[\frac{\sqrt{8s+1} - 1}{2}\right]$ où E est le symbole usuel désignant le plus grand nombre entier que contient la quantité qui est sous ce signe. On peut aussi démontrer que le nombre ε est au plus égal au plus petit de deux nombres k et $E\left[\frac{\sqrt{1 + 8(s-k)} + 1}{2}\right]$.[1]

---

[1] *L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernouilli'schen Zahlen, Berlin 1893, Seite 99.*

Cette remarque met en évidence le lien qui existe entre la méthode qui nous occupe et la théorie des nombres dans le sens le plus étendu de cette expression.

Cela étant, on voit que les permutations en nombre fini que l'on peut effectuer dans chaque terme de poids s ne pourront jamais donner un nombre infini des termes.

On voit donc que la définition de la partie littérale d'un invariant n'implique aucune contradiction, qui serait inévitable, si le nombre ε pouvait augmenter indéfiniment, puisque les invariants sont toujours envisagés comme des sommes comportant un nombre fini de termes.

Un problème beaucoup plus difficile est la démonstration du théorème énoncé par Halphen et par Laurent sur le nombre fini des invariants indépendants. Ce théorème n'a jamais été démontré. La démonstration que donne M. Laurent[1] est évidemment insuffisante et on remarque bien que l'auteur n'a fait que suivre l'analogie avec le théorème célèbre de Gordan, sans cependant parvenir à établir une loi analogue pour les invariants des équations différentielles.

D'après M. Laurent, une équation telle que $F(P_1^{(m_1)} \ldots) = x_1^{s} F(p_1^{(m_1)} \ldots)$ établit une relation entre les P et les p. Or quand les P sont donnés ainsi que U_0 et x_1, les p seront entièrement déterminés. Donc les p sont aussi donnés; mais entre n quantités données $p_1, \ldots, p_n$ on ne peut pas établir plus de n relations indépendantes et comme on peut toujours se débarrasser de p_1 on ne pourra pas avoir plus de $n-1$ relations indépendantes. D'après le savant auteur, le nombre maximum des invariants relatifs est égal à $n-1$. L'auteur n'oublie qu'une seule chose, notamment que les relations dont il parle sont verifiées identiquement. Or entre n quantités données il peut exister non seulement n, mais une infinité des relations identiques.

M. Forsyth a cherché de prouver un théorème beaucoup moins général, en affirmant que le nombre des invariants primitifs définis précédemment est au plus égal à $n-2$ pour l'équation générale de n-ième ordre. Nous verrons plus tard, que la démonstration de M. Forsyth laisse beaucoup à désirer.

Nous allons montrer maintenant deux méthodes générales pour former

---

[1] *Laurent, Traité d'Analyse V, 175.*

les invariants qui dérivent par certains procédés analytiques des invariants donnés. Ces méthodes ont été trouvées par Halphen et perfectionnées par Forsyth. Nous voulons indiquer quelques nouvelles simplifications.

Étant donné un invariant relatif de dimension s aux coefficients P que nous désignons par F_s soit f_s l'invariant transformé aux coefficients p. D'après le théorème fondamental nous aurons:

$$F_s = f_s \cdot x_1{}^s.$$

Soit $F_r = f_r x_1{}^r$ une autre équation définissant un nouvel invariant de dimension r. On voit immédiatement que $\frac{F_s{}^r}{F_r{}^s} = \frac{f_s{}^r}{f_r{}^s}$, donc le quotient $\frac{F_s{}^r}{F_r{}^s}$ est un invariant absolu.

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation:

$$\frac{F_s{}^r}{F_r{}^s} = \frac{f_s{}^r}{f_r{}^s}$$

nous aurons:

$$r\frac{F_s{}'}{F_s} - s\frac{F'{}_r}{F_r} = x_1\left(r\frac{f'_s}{f_s} - s\frac{f'_r}{f_r}\right)$$

et puisque $F_s F_r = x_1{}^{r+s} f_s f_r$ on verra que $rF'{}_s F_r - sF'{}_r F_s$ est aussi un invariant, dont la dimension est $s + r + 1$.

Ces invariants sont analogues aux déterminants fonctionnels de Jacobi.

Une autre méthode pour former les invariants est fondée sur la remarque suivante. Soit $\Phi_k = \varphi_k x_1{}^k$ un invariant que nous écrivons simplement Φ. Formons la dérivée logarithmique de $\frac{\Phi}{\varphi}$ en écrivant:

$$\frac{dlog\frac{\Phi}{\varphi}}{dX} = \frac{dlog\Phi}{dX} - x_1\frac{dlog\varphi}{dx}.$$

Désignons comme toujours $\frac{x_2}{x_1}$ par L_1 et d'une manière analogue $\frac{dlog\Phi}{dX} = \frac{\Phi_1}{\Phi}$ par M_1, $\frac{dlog\varphi}{dx} = \frac{\varphi'}{\varphi}$ par m_1.

Nous obtiendrons:

$$M_1 = x_1 m_1 + kL_1.$$

Soit encore $\frac{dM_1}{dX} = M_2$, $\frac{dm_1}{dx} = m_2$. On aura:

$$M_2 = x_1^2 m_2 + L_1 x m_1 + kL_2.$$

Formons maintenant la fonction: $2kM_2 - M_1^2$. On trouve facilement:

$$2kM_2 - M_1^2 = x_1^2(2km_2 - m_1^2) + k^2(2L_2 - L_1^2).$$

On voit que $2kM_2 - M_1^2$ serait un invariant dans le cas où $2L_2 - L_2^2 = 0$. Or ce cas se présente de lui-même si l'on a non seulement $P_1 = 0 = p_1$ mais encore $P_2 = p_2 = 0$, puisque d'après la formule 39) on a pour la forme normale ($P_1 = 0 = p_1$) la relation:

$$\frac{n+1}{12}(2L_2 - L_1^2) = P_2 - p_2 x_1^2.$$

Si donc on a l'équation:

$$\frac{d^n Y}{dX^n} + (n)_3 P_3 \frac{d^{n-3} Y}{dX^{n-3}} + \ldots + P_n Y = 0$$

et si l'on peut obtenir la transformée ayant la même forme:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + (n)_3 p_3 \frac{d^{n-3} Y}{dx^{n-3}} + \ldots + p_n y = 0$$

la fonction $2kM_2 - M_1^2$ sera un invariant.

Nous rappelons que $M_1 = \frac{d\log\Phi}{dX}$ et que Φ est l'invariant de dimension k. Les invariants que nous venons de définir ne sont autre chose que les »quadrinvariants« de M. Forsyth.

On peut montrer, que toute équation de n = ième ordre peut être réduite à la forme canonique:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + (n)_3 p_3 \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \ldots\ldots + p_n y = 0$$

au moyen d'une équation différentielle linéaire et homogène de deuxième ordre. Ce théorème est de M. Forsyth. Nous le démontrerons en remarquant que si $p_2 = 0$, la formule 39) donne $P_2 = \frac{n+1}{12}(2L_2 - L_1^2)$ avec $L_1 = -\frac{2}{n-1}\frac{U_1}{U_0}$ puisque $P_1 = p_1 = 0$ donne cette relation.

Substituons $x_1 = z_0^{-2}$ ce qui donne $U_0 = z_0^{n-1}$ et posons $\frac{z_k}{z_0} = \zeta_k$. Nous aurons:

$$P_2 = \frac{n+1}{3}(\zeta_1^2 - \zeta_2 - \zeta_1^2) \text{ donc:}$$

$$\zeta_2 = -\frac{3}{n+1}P_2 \text{ ou ce qui est la même chose:}$$

$$\frac{d^2z_0}{dX^2} + \frac{3}{n+1}P_2 z_0 = 0$$

ou encore:

$$\frac{d^2x_1^{-\frac{1}{2}}}{dX^2} + \frac{3}{n+1}P_2 x_1^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Donc si $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$ est une solution de l'équation du deuxième ordre $\frac{d^2z}{dX^2} + \frac{3}{n+1}P_2 z = 0$, la proposée $\frac{d^nY}{dX^n} + (n)_2 P_2 \frac{d^{n-2}Y}{dX^{n-2}} + \ldots = 0$ se transformera en $\frac{d^ny}{dx^n} + (n)_3 p_3 \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots + p_n y = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons appliquer cette méthode à l'équation du deuxième ordre pour démontrer le fait entrevu par Halphen, que cette équation n'a pas d'invariants. Mais avant de le faire nous voulons appliquer le théorème de M. Forsyth au cas où la proposée a la même forme canonique. Nous poserons donc $P_2 = 0$; dans ce cas il est clair, qu'il faudra résoudre l'équation du deuxième ordre $\frac{d^2\frac{1}{\sqrt{x_1}}}{dX^2} = 0 = \frac{d^2z}{dX^2}$. Or cette équation n'est autre chose que l'équation différentielle des lignes droites, situées dans le plan (X, z), puisqu'on a $z = aX + b$ où a et b sont deux constantes arbitraires. On trouve donc:

$\frac{1}{\sqrt{x_1}} = aX + b$ ou bien $\frac{dx}{dX} = \frac{1}{(aX+b)^2}$ ce qu'on peut intégrer.

Nous ne voulons considérer que le cas où $b = 0$, $a = \sqrt{-1} = i$, cela veut dire quand l'équation $z = Xi$ représente les deux droites isotropes. Dans ce cas ou trouve, en égalant la constante additive à zéro, que la substitution $X = \frac{1}{x}$ remplit la condition trouvée plus haut. Nous avons donc démontré le théorème suivant: La transformation au moyen des rayons vecteurs réciproques appliquée à la variable indépen-

dante, transforme l'équation canonique ($P_1 = 0$, $P_2 = 0$) en une autre ayant la même forme ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$). Ou encore: la transformation ainsi définie n'altère pas la forme canonique de M. Forsyth.

La méthode que nous venons de considérer, est étroitement liée à la théorie des réciprocants imaginée par M. Sylvester. Une fonction rationnelle des quantités $x_1 = \frac{dx}{dX}$, $x_2 = \frac{d^2x}{dX^2}$, . . . fonction que nous voulons désigner par (x, X), est un réciprocant, si après la permutation (X, x) qui transforme x_1 en $\frac{1}{x_1}$ etc., la proposée se transforme en elle-même à une puissance de x_1 près en changeant en même temps son signe.

Ainsi $(x, X) = \frac{x_3}{x_1} - \frac{3}{2}\frac{{x_2}^2}{{x_1}^2} = \lambda_2 - \frac{3}{2}{\lambda_1}^2$ (23) est un réciprocant, comme on démontre aisément en formant $(X_1 x)$. En désignant comme toujours $\frac{x_2}{x_1}$ par L_1 nous trouverons $(x, X) = \frac{2L_2 - {L_1}^2}{2}$ donc $P_2 = \frac{n+1}{6}(x, X)$ dans la formule trouvée plus haut. Le réciprocant (x, X) s'appelle la fonction de Schwarz ou le Schwarzian d'après le nom du géomètre allemand qui a étudié cette fonction dont la première notion est dûe à Lagrange. On vérifie aisément que si le Schwarzian est égal à zéro, P_2 est nul et vice versa. La transformation par des rayons vecteurs réciproques $Xx = 1$ appliquée à la forme normale ($P_1 = 0$) où l'on a $U_0 = -\frac{n-1}{2}L_1$, fait donc annuler la fonction de Schwarz ce qu'on pourra vérifier directement puisqu'on a $x_1 = -\frac{1}{X^2}$, $L_1 = -\frac{2}{X}$, $L_2 = \frac{2}{X^2}$ et finalement $2L_2 - {L_1}^2 = 0 = (X, x)$.

Appliquons les mêmes considérations à l'équation du second ordre. Dans ce cas on a: $x_1 = {z_0}^{-2}$, $U_0 = z_0$ et $z_2 + P_2 z_0 = 0$. L'équation proposée $Y_2 + P_2 Y = 0$ avait la même forme; on a donc $Y = z_0 y$ et $x_1 = {z_0}^{-2}$, mais d'autre part $x_2 = -2{z_0}^{-3}z_1$ ou $z_0 x_2 + 2z_1 x_1 = 0$.

Un calcul bien simple donne:

$$Y_2 + P_2 Y = z_0 {x_1}^2 y'' + (z_0 x_2 + 2z_1 x_1)y' + (z_2 + P_2 z_0)y = 0.$$

Or z_0 étant la solution de $Y_2 + P_2 Y = 0$, l'équation devra s'abaisser jusqu'au premier ordre. Mais le coefficient de y' étant nul elle

s'abaisse encore, puisqu'on aura $z_0 x_1^2 y'' = 0$ ou $y'' = 0$ et on trouve immédiatement $y = ax + b$.

Ce théorème n'est d'aucune utilité pour la solution de l'équation proposée, puisque l'équation auxiliaire en z n'est autre chose que la proposée. Mais l'existence d'une solution étant prouvée par le théorème de Cauchy, la forme de l'intégrale ne nous intéresse point. Ce que nous voulons prouver c'est l'impossibilité de former un invariant pour l'équation du second ordre. Or ce théorème a été démontré implicitement par les considérations précédentes.

Nous avons démontré que la substitution $x_1 = z_0^{-2}$ transforme l'équation $Y_2 + P_2 Y = 0$ en $y'' = 0$. On pourra donc toujours transformer une équation du second ordre de manière à annuler tous les coefficients excepté $p_0 = 1$. Supposons pour un moment qu'il existe un invariant qui sera en tout cas une fonction homogène quant à la dimension. Soit $Y_2 + 2P_1 Y_1 + P_2 Y = 0$ la proposée où on pourra toujours faire disparaître d'abord P_1 puis P_2. L'invariant V aura nécessairement la forme $F(P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)})$ où F est une fonction entière où il ne se trouve aucun membre qui ne contient ni P_1 ni P_2. L'invariant transformé v aura la forme $F(p_1^{(m_1)}, p_2^{(m_2)})$; or $p_1 = p_2 = 0$; donc l'invariant transformé y serait identiquement nul, et on a par définition $V = x_1^s v$. Par conséquent V est aussi nul identiquement.

VII.

Quand on connait déjà la partie littérale d'un invariant, on pourra calculer les coefficients numériques par des méthodes différentes, par exemple au moyen de la substitution infinitésimale. Mais nous voulons montrer d'abord que cette dernière méthode permet d'aller plus loin. Comme nous avons déjà remarqué plus haut, la substitution infinitésimale a toute la généralité voulue et il est facile de démontrer qu'on pourrait très bien calculer par ce procédé la partie littérale des invariants sans avoir besoin de recourrir à la loi de homogénéité. On pourrait disposer les calculs de manière absolument analogue comme dans le cas de la substitution (U_0, x_1), mais nous allons suivre une autre voie plus courte.

Soit donnée la substitution $Y = U_0 y$, $x = X + \varepsilon T$ où T est une fonction synectique de X, ε une quantité infiniment petite indépendante

de X et dont nous ne voulons conserver que la première puissance en rejetant les infiniment petits d'ordre supérieur à un. Nous aurons $x_1 = 1 + \varepsilon T_1$ et $x_k = \varepsilon T_k$. $(k>1.)$ On trouve facilement:

$$43)\quad A_{nk} = \frac{n!}{k-1!\ n-k+1!}(1+\varepsilon T_1)^{k-1}\varepsilon T_{n-k+1} = (n)_{k-1}\varepsilon T_{n-k+1}. \quad (k<n.)$$

$$44)\quad A_{nn} = (1+\varepsilon T_1)^n = 1 + n\varepsilon T_1.$$

Appliquons ces formules au calcul de p_2 et p_3. Nous aurons: $\frac{U_1}{U_0} = -\frac{n-1}{2}\varepsilon T_2$ et nous trouverons:

$$45)\quad p_2 = -\frac{n+1}{6}\varepsilon T_3 + P_2(1-2\varepsilon T_1).$$

$$46)\quad p_3 = P_3(1-3\varepsilon T_1) - 3\varepsilon P_2 T_2 - \frac{n+1}{4}\varepsilon T_4.$$

$$47)\quad \frac{dp_2}{dx} = \frac{dP_2}{dX}(1-3\varepsilon T_1) - 2\varepsilon P_2 T_2 - \frac{n+1}{6}\varepsilon T_4.$$

Au lieu d'éliminer T vérifions directement que $3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3$ est un invariant. Nous avons d'abord:

$$3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3 = (3\frac{dP_2}{dX} - 2P_3)(1-3\varepsilon T_1).$$

Or $1 - 3\varepsilon T_1$ est aux infiniment petits de deuxième ordre près égal à x_1^{-3} et on aura effectivement:

$$3\frac{dP_2}{dX} - 2P_3 = x_1^3(3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3).$$

On voit donc que la substitution infinitésimale ne diffère point, quant aux invariants, de la substitution générale $(U_0,\ x_1)$.

Mais si on connait a priori la partie littérale, on pourra procéder autrement. Si l'on sait d'avance que $aP_2' + bP_3 = x_1^3(ap_2' + bp_3)$ est un invariant, on écrira: $x_1^3 = 1 + 3\varepsilon T_1$ et en substituant au lieu de p_2' et p_3 leurs valeurs, on obtiendra:

$$aP_2' + bP_3 = (1+3\varepsilon T_1)\left\{\begin{array}{l} aP_2'(1-3\varepsilon T_1) - (2a+3b)\varepsilon P_2 T_2 \\ -\frac{a(n+1)}{6}\varepsilon T_4 + bP_3(1-3\varepsilon T_1) \\ -\frac{b(n+1)}{4}\varepsilon T_4 \end{array}\right\}$$

et comme $(1 + 3\varepsilon T_1)(1 - 3\varepsilon T_1)$ est aux infiniment petits de deuxième ordre près $= 1$, on trouvera $2a + 3b = 0$. Un des coefficients numériques étant arbitraire, posons $a = 3$, ce qui donne $b = -2$. On voit que $3P_2' - 2P_3$ est bien un invariant.

Si l'on a formé un invariant pour la forme normale $(P + Y)_n = 0$ $(P_1 = 0)$ il est facile de trouver l'invariant correspondant de la forme la plus générale; c'est ce qu'a fait Halphen dans son Mémoire célèbre (1884). Nous voulons essayer à préciser la méthode que M. Halphen n'a indiqué que bien succinctement.

Soit $(p + y)_n = 0$ l'équation transformée que nous supposons donnée sous la forme normale $(p_1 = 0)$ tandis que la proposée soit une forme absolument générale. Malgré cela nous pouvons toujours supposer $X = x$, puisqu'on pourra imaginer une transformée seconde $(\pi + z)_n = 0$ à la variable indépendante X ayant la même forme normale $(\pi_1 = 0)$ que la première transformée. Si nous voulons donc avoir la substitution la plus générale il suffira de considérer l'invariant de cette seconde transformée: or cet invariant a absolument la même forme que l'invariant de l'équation $(p + y)_n = 0$. Nous pouvons donc discuter ce dernier cas comme étant beaucoup plus simple, puisqu'il ne faudra qu'effectuer la substitution $Y = U_0 y$ sans changer de variable indépendante.

Cela étant, substituons $Y = U_0 y$ dans la forme générale $(P + Y)_n = 0$. D'après ce qu'on a vu plus haut, la transformée sera $(\omega + y)_n = 0$ avec $\omega_0 = U_0$. Divisons par U_0 et pour obtenir la transformée sous la forme normale, posons $p_1 = 0$. Or $p_1 = \frac{U_1}{U_0} = P_1$, donc $P_1 = -\frac{U_1}{U_0}$. Appliquons à la fonction $\frac{U_1}{U_0} = -P_1$ le symbole I, nous aurons:

$$u_1 = \frac{U_1}{U_0} = -P_1;\ u_2 = \frac{U_2}{U_0} = u_1^{\mathrm{I}} = -P_1' + P_1^2;\ u_3 = u_1^{\mathrm{II}} = -P_1'' + 3P_1P_1' - P_1^3.$$

Or on a: $p_2 = P_2 + 2P_1u_1 + u_2$; par conséquent:

$$p_2 = P_2 - P_1^2 - P_1'.$$

On trouve encore: $p_3 = \frac{(P + U)_3}{U_0} = P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3 - P_1''$.

Or $X = x$ et $y_1 = 1$. On a donc:

$$p_1' = P_2' - 2P_1'P_1 - P_1''.$$

Substituant dans l'invariant $3p_2' - 2p_3$ on trouve:

48) $-P_1'' + 3(P_2' - 2P_1P_1') - 2(P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3)$

c'est l'invariant de Halphen qui ne dépend pas de l'ordre de l'équation générale.

Il suffit de poser $P_1 = 0$ pour en obtenir l'invariant de Brioschi $3P_2' - 2P_3 = V_3$.

VIII.

Il nous faut rappeler les propriétés connues de l'équation adjointe de Lagrange pour donner ensuite à cette équation une forme nouvelle très abrégée.

Au lieu d'employer la notation de Lagrange[1] nous écrirons l'équation différentielle linéaire sous la forme:

$$q_0y + q_1y' + \ldots q_ny^{(n)} = T = 0,$$

où T est nul si l'équation doit être homogène.

Multiplions avec Lagrange les deux membres de cette équation par zdx où z est une fonction de x, et intégrons par parties en posant $q_kz = u_k$, $k \leq n$. On arrive facilement à l'expression:

$$\begin{aligned}
&\int [u_0 - u_1' + u_2'' \ldots (-1)^n u_n^{(n)}]ydx \\
&+ [u_1 - u_2' + u_3''' \ldots (-1)^{n-1} u_n^{(n-1)}]y \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ u_ny^{(n-1)}
\end{aligned}$$

qui doit s'annuler puisque $\int Tzdx = 0$.

Soit maintenant: $u_0 - u_1' + \ldots (-1)^n u_n^{(n)} = 0$, ou ce qui est la même chose:

$$49)\ q_0z - (q_1z)' + \ldots (-1)^n (q_nz)^{(n)} = 0.$$

Si cette condition est remplie l'équation $T = 0$ se transformera en une équation de $n-1$ = ième ordre. On voit que l'intégrale z de 49) est un multiplicateur de l'équation donnée $T = 0$.

Pour écrire l'équation adjointe 49) sous une forme plus abrégée, définissons un nouveau symbole:

---

[1] *Lagrange, Oeuvres. Vol. I, p. 471.*

$$(1 + p_i)_k = p_{i+k} + (k)_1 p'_{i+k-1} + \ldots + p_i^{(k)}.$$

Si $i = 0$ nous pouvons écrire:

$$(1 + p)_k = p_k + (k)_1 p'_{k-1} + \ldots + p_0^{(k)}.$$

Tous les termes de ce dernier symbole sont de dimension k.

Nous disons maintenant que l'équation adjointe n'est autre chose que le symbole:

$$[(1 - p) + z]_n = 0.$$

Pour le démontrer, écrivons l'équation adjointe dans le cas où $(p + y)_n = 0$ est la proposée. Nous aurons:

$$(p_0 z)^{(n)} - (n)_1 (p_1 z)^{(n-1)} + \ldots (-1)^n (p_n z) = 0.$$

Différentions d'après la formule de Leibnitz et ordonnons, nous aurons:

$$p_0 z^{(n)} + (n)_1 p_0' - (n)_1 p_1 \Big| z^{(n-1)} + \ldots = (1-p)_0 z^{(n)} + (n)_1 (1-p)_1 z^{(n-1)} + \ldots$$

$$= [(1 - p) + z]_n.$$

L'équation adjointe par rapport à $(p + y)_n = 0$ est donc:

$$50)\ [(1 - p) + z]_n = 0.$$

Formons maintenant l'adjointe de l'adjointe ou l'adjointe seconde. On trouve:

$$([1 - (1 - p)] + y)_n = 0.$$

On ne pourra pas poser immédiatement $1 - (1 - p) = 0$, 1 n'étant qu'une unité symbolique. Cependant il en est ainsi puisqu'on a par définition: $[1 - (1 - p)]_0 = (1 - p)_0 = p_0$ etc. L'adjointe seconde est donc égale à $(p + y)_n = 0$, cela veut dire égale à la proposée, propriété connue, mais que l'on n'a démontrée jusqu'à présent qu'au moyen des intégrations par parties assez compliquées.

On voit donc que l'intégrale de l'adjointe est un multiplicateur de la proposée et vice versa. (Loi de réciprocité.)

Il est très facile de démontrer que les invariants de la proposée sont les invariants de l'adjointe et réciproquement; il suffit de démontrer que le premier membre de l'adjointe est un covariant de la proposée.

On a effectivement:

51) $(P + Y)_n = 0$, équation donnée; 52) $[(1 - P) + Z]_n = 0$, son adjointe.

53) $(p + y)_n = 0$, équation transformée; 54) $[(1 - p) + z]_n = 0$, son adjointe.

Donc la transformée de l'adjointe n'est autre chose que l'adjointe de la transformée c. q. f. d., puisque le symbole $(1 - p)$ est évidemment formé de $(1 - P)$ comme p est formé de P.

Appliquons ces remarques au calcul des invariants. Soit $(p + y)_n = 0$ une forme normale $(p_1 = 0)$, $(q + z)_n = 0$ son adjointe, on trouve: $q_1 = 0$, $q_2 = p_2$, $q_3 = 3p_2' - p_3$. On remarquera que l'adjointe de la forme normale est elle-même une forme normale.

Soit $ap_2' + bp_3 = v_3$ l'invariant de dimension 3 dont les coefficients sont inconnus. D'après ce que nous avons dit, $aq_2' + bq_3$ sera l'invariant de l'adjointe; substituons au lieu de q_2' et q_3 leurs valeurs nous aurons:

$$ap_2' + b(3p_2' - p_3)$$

et comme cet invariant ne peut différer de $ap_2' + bp_3$ que d'un facteur numérique, le coefficient de p_3 étant $-b$ dans l'invariant écrit précédemment on voit que la somme des deux invariants est identiquement nulle. On a donc $3b + 2a = 0$ et en posant $a = 3$ on obtient la forme connue $v_3 = 3p_2' - 2p_3$.

On peut traiter de la même manière l'équation générale où $p_1 \not\equiv 0$. L'invariant de dimension 3 sera généralement de la forme:

$$v_{(p)} = ap_1'' + bp_2' + cp_1p_1' + dp_3 + ep_1p_2 + fp_1^3.$$

Comme p_4, p_5 . . . . n'entrent pas dans cette formule, il suffit de discuter l'equation de troisième ordre $(p + y)_3 = 0$.

Formons l'adjointe:

$$[(1 - p) + z]_3 = z''' - 3p_1z'' + 3(p_2 - 2p_1')z' + (-p_3 + 3p_2' - 3p_1'')z = 0.$$

On a donc: $q_1 = -p_1$; $q_2 = p_2 - 2p_1'$; $q_3 = -p_3 + 3p_2' - 3p_1''$.

Formons l'invariant $v_{(q)}$ qui correspond à $v_{(p)}$. Nous aurons:

$$-ap_1'' + b(p_2' - 2p_1'') + cp_1p_1' + d(-p_3 + 3p_2' - 3p_1'') + e(2p_1' - p_2)p_1 - fp_1^3.$$

Or $v_{(p)} + v_{(q)} = 0$ ce qui donne: $2b + 3d = 0$ ou $b : d = -3 : 2$; $2c + 2e = 0$; donc $c : e = -1 : 1$.

L'invariant $v_{(p)}$ a donc la forme:

$$ap_1'' - 3p_2' + cp_1p_1' + 2p_3 - cp_1p_2 + fp_1^3.$$

Pour déterminer a, c, f on pourrait former d'autres équations analogues à l'adjointe, par exemple $[(1 + p) + z]_n = 0$; mais nous n'insistons pas sur ce sujet qui exige le développement de la théorie des équations »associées«. Nous voulons plutôt montrer qu'une méthode analogue est applicable à tous les invariants primitifs.

Soit donné l'invariant de dimension 4:

$$v_4 = ap_4 + bp_3' + cp_2'' + dp_2^2 = v_{(p)}$$

où l'on a posé $p_1 = 0$.

Comme p_5 etc. n'entrent pas dans v_4 il suffit de prendre l'équation $(p + y)_4 = 0$ $(p_1 = 0)$ et de former son adjointe. Si l'on forme alors $q_2 = p_2$, $q_3 = 3p_2' - p_3$, $q_4 = 6p_2'' - 4p_3' + p_4$ et si l'on ajoute $v_{(q)}$ à $v_{(p)}$, on obtient $6a + 3b = 0$ ou $b = -2a$. Posant $a = 1$ on trouve: $v_4 = p_4 - 2p_3' + cp_2'' + dp_2^2$ et il reste à déterminer c et d. Mais si $p_2 = 0$ cela veut dire si l'on a la forme canonique:

$$y^{IV} + 4p_3y' + p_4y = 0$$

ou même généralement:

$$y^{(n)} + (n)_3p_3y^{(n-3)} + \ldots + p_ny = 0,$$

on voit immédiatement que $v_4 = p_4 - 2p_3'$ est l'invariant cherché de dimension 4.

Mais il faut se bien garder de croire que l'on pourra toujours calculer l'invariant de l'équation de n-ième ordre en ne calculant que l'invariant d'une équation de l'ordre le moins élevé possible. Si nous avons pu appliquer cette méthode à v_4 ce n'est que parce que la supposition $p_2 = 0$ a fait disparaître la partie non linéaire (le terme p_2^2) de cet invariant et que la partie linéaire ne dépend nullement de l'ordre de l'équation. Halphen et Brioschi ont affirmé erronément que cette propriété est tout a fait générale et on doit à M. Forsyth la réfutation de cette erreur. Si l'on calcule v_4 pour l'équation normale $(p_1 = 0)$ au moyen de la méthode infinitésimale, on trouve aisément:

$$v_4 = p_4 - 2p_3' + \frac{6}{5}p_2'' - \frac{3}{5}\,\frac{5n + 7}{n + 1}p_2^2,$$

où n est l'ordre de l'équation. C'est l'invariant ϑ_4 de M. Forsyth. On remarquera que dans le cas $p_2 = 0$ cette équation donne la même valeur de v_4 que nous avons trouvée au moyen de l'équation adjointe de Lagrange.

Remarquons maintenant que dans le cas $n = 4$ l'invariant v_4 n'est autre chose que:

$$\gamma = p_4 - 2p_3' + \frac{6}{5}p''_2 - \frac{3^4}{5^2}p_2^2$$

expression dûe à M. Brioschi.

D'autre part, Halphen a trouvé par une méthode tout à fait différente un invariant:

$$w_4 = p_4 - \frac{6}{5}p_3' - \frac{3^4}{5^2}p_2^2 \text{ (pour } n = 4).$$

C'est l'invariant v_4 de Halphen.

Or la définition même des invariants primitifs ainsi que les méthodes que nous avons employées pour les calculer font supposer que pour chaque dimension il ne peut exister qu'un seul invariant primitif. Effectivement nous allons démontrer directement que w_4 (v_4 de Halphen) n'est autre chose que l'invariant γ de Brioschi.[1] Mais en même temps nous verrons que ce théorème est assujetti à une restriction.

Pour y arriver, il suffit de remarquer, que M. Halphen a calculé son invariant pour le cas spécial d'une équation du second ordre dont tous les invariants sont identiquement nuls. Ainsi w_4 lui-même est nul, mais comme il ne s'agit que de la forme de w_4, Halphen croyait pouvoir affirmer qu'il a trouvé la forme générale. Cette affirmation est erronée puisque dans le cas de M. Halphen l'invariant $3p_2' - 2p_3 = v_3$ étant nul, cette équation établit une relation spéciale entre p_2 et p_3 qui change la forme générale de v_4.

Effectivement, si $3p_2' - 2p_3' = 0$ on aura:

$$\gamma - w_4 = \frac{2}{5}(3p_2'' - 2p_3') = 0,$$

mais cette conclusion tombe en défaut dans le cas où $v_3 \not\equiv 0$.

On voit donc que l'invariant w_4 (ou v_4 de Halphen) n'est identiquement égal à γ que dans le cas $v_3 = 0$. Dans tout autre cas l'expression de Halphen n'est nullement invariante. Il est évident, que la condition $w_4 = 0$ n'est pas nécessaire pour avoir l'identité $\gamma = w_4$; d'autre part, les deux conditions simultanées $v_3 = 0$, $w_4 = 0$ choisies par Halphen sont suffisantes et même plus que suffisantes puisque la dernière est superflue.

---

[1] *M. Forsyth fait remarquer que w_4 est »practically« identique à γ. Mais ce n'est pas une démonstration.*

Jusqu'ici nous avons parlé de l'équation générale sans introduire la définition de l'irréductibilité — notion importante dûe à Frobenius et principalement à Königsberger. Si l'équation donnée est irréductible, ses invariants seront généralement différents de zéro. Il n'en est pas ainsi, si l'équation proposée peut être réduite d'une manière quelconque à une équation de deuxième ordre; cette dernière ayant tous ses invariants identiquement nuls, ceux de l'équation proposée seront aussi nuls. Quelquefois on ne le verra qu'après avoir transformé la proposée en lui donnant la forme normale ($p_1 = 0$) ou même canonique ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$). Dans le chapitre suivant nous allons traiter quelques questions qui se rapportent à ce sujet.

IX.

Dans les traités d'analyse on démontre le théorème suivant:

»Si une équation linéaire et homogène d'ordre inférieur a toutes ses intégrales communes avec une équation analogue d'ordre supérieur, on pourra représenter cette dernière comme une nouvelle équation linéaire et homogène dont l'argument ne sera autre chose que le premier membre de l'équation précédente.«[1]

Nous allons donner à ce théorème une forme tout à fait explicite.

Soit $\sigma_n = (s + y)_n = 0$ une équation d'ordre n,

$\pi_m = (p + y)_m = 0$ une équation d'ordre m,

où $n > m$ et $n - m = k > 0$.

Appliquons le symbole $(1 + p_i)_k$ défini précédemment et posons d'une manière analogue:

$$(1 + p_{-i})_k = p_{k-i} + (k)_1 p'_{k-i-1} + \ldots + p^{(k)}_{-i}$$

où après le développement il faut poser tous les p dont les indices restent négatifs, identiquement nuls. Ainsi on aura: $(1 + p_{-1})_2 = p_1 + 2p_0'$, p_{-1}'' étant par définition nul.

Différentions l'équation $\pi_m = 0$ successivement $n - m = k$ fois par rapport à x. Nous aurons le résultat:

$$55)\ \pi_m^{(k)} = \pi_m^{(n-m)} = (1 + mp_{-k})_k y^{(m+k)} + (1 + mp_{-k+1})_k y^{(m+k-1)} + \ldots\ldots + (1 + mp_m)_k y = 0$$

où l'on a écrit mp au lieu de p pour faire entrer les coefficients de la formule de Newton, de manière à obtenir:

---

[1] *Königsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, 149.*

$(1 + mp_{-i})_k = (m)_{k-i}p_{k-i} + (k)_1(m)_{k-i-1}p'_{k-i-1} + \ldots\ldots$
et on a: $(1 + mp_{-k})_k = (m)_0 p_0 = p_0$.

La formule 55) donne par exemple pour π'_m l'expression suivante:

$$\pi'_m = p_0 y^{(m+1)} + (m)_1 p_1 \left| \begin{matrix} y^{(m)} \\ p_0' \end{matrix} \right| + \ldots\ldots$$

que l'on vérifie immédiatement.

Pour simplifier nos calculs, prenons l'équation de deuxième ordre: $\sigma_4 = (s + y)_4 = 0$ et écrivons une équation $\pi_2 = (p + y)_2 = 0$ du second ordre. Si toutes les intégrales de π_2 vérifient σ_4 on sait a priori que σ_4 sera de la forme $(r + \pi_2)_2 = 0$.

Or si l'on différentie deux fois successivement l'équation $\pi_2 = 0$, on obtient facilement le système linéaire algébrique:

	r_0	$2r_1$	r_2
s_0	p_0	0	0
$4s_1$	$2(p_1 + p_0')$	p_0	0
$6s_2$	$(p_2 + 4p_1' + p_0'')$	$(2p_1 + p_0)$	p_0

qui définit les r; mais on peut aussi trouver les relations pour $4s_3$ et s_4 et si toutes les relations sont remplies simultanément, π_2 sera identiquement le »diviseur différentiel« de σ_4. Remarquons que le déterminant du système n'est pas nul puisque $p_0 \not\equiv 0$. Si $p_0 = 1$, comme nous le supposons toujours, ce déterminant est égal à 1.

Soit $p_1 = 0$, donc $\pi_2 = y'' + p_2 y = 0$ une forme normale; soit en outre $r_0 = s_0 = 1$. Nous aurons en supposant encore $r_1 = 0$, d'abord $s_1 = 0$ puis:

$$y^{IV} + \begin{matrix} p_2 \\ r_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} y'' + 2p_2'y' + p_2'' \\ r_2 p_2 \end{matrix} \right| y = 0.$$

Donc: $p_2 + r_2 = 6s_2$; $4s_3 = 2p_2'$; $s_4 = p_2'' + r_2 p_2$.
Supposons enfin $p_2 = r_2$. Nous obtiendrons:

$$56)\quad \sigma_4 = y^{IV} + 2p_2 y'' + 2p_2'y' + p_2'' \left| \begin{matrix} y = 0. \\ p_2^2 \end{matrix} \right.$$

Dans ce cas très simple on vérifie immédiatement que:
$\sigma_4 = \pi_2'' + p_2\pi_2 = (y'' + p_2 y)'' + p_2(y'' + p_2 y) = 0$ puisqu'on a $y'' + p_2 y = 0$.

Considérons les invariants de l'équation 56). Nous savons que l'équation normale du quatrième ordre:

$$y^{IV} + 6s_2y'' + 4s_3y' + s_4y = 0$$

possède les invariants $v_3 = 3s_2' - 2s_3$ et $v_4 = \gamma = s_4 - 2s_3' + \frac{6}{5}s_2'' - \frac{3^4}{5^2}s_2^2$.

Mais dans le cas actuel: $6s_2 = 2p_2$; $3s_2' = p_2'$; $4s_3 = 2p_2'$ donc $v_3 = 0$.

Nous avons démontré que si $v_3 = 0$, l'invariant γ de Brioschi se transforme en w_4 (v_4 de Halphen). On a donc:

$$\gamma = w_4 = s_4 - \frac{6}{5}s_3' - \frac{3^4}{5^2}s_2^2 = \frac{2}{5}p_2'' + \frac{4^2}{5^2}p_2^2.$$

Il est facile de démontrer que dans le cas que nous considérons, $\gamma = w_4$ n'est qu'un pseudo-invariant. Effectivement, nous pouvons transformer l'équation $(y'' + p_2y)'' + p_2(y'' + p_2y) = 0$ de manière à annuler le coefficient qui correspond à p_2. Il suffit de changer de variable indépendante dans $y'' + p_2y = 0$ au moyen de la transformation connue, par exemple en employant la méthode des rayons vecteurs réciproques. Nous aurons la transformée de la forme $\eta^{IV} = 0$ ou bien en intégrant: $\eta = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3$ où ξ est la nouvelle variable indépendante.

Or tous les invariants de l'équation différentielle linéaire $\eta^{(n)} = 0$ qui représente toutes les paraboles de degré $n-1$ sont identiquement nuls puisque tous les coefficients sauf celui de $\eta^{(n)}$ qui est 1, sont nuls. Donc si w_4 était un invariant il devrait aussi disparaître ce qui n'est possible que pour les valeurs spéciales de p_2 satisfaisant à l'équation $\frac{2}{5}p_2'' + \frac{4^2}{5^2}p_2 = 0$ ou bien à l'équation $z'' + \frac{8}{5}z = 0$. Mais p_2 étant une fonction synectique arbitraire, il n'est pas possible de définir généralement une telle équation; donc w_4 n'est pas un invariant de la proposée.

Nous avons donc démontré que si une équation du quatrième ordre admet le diviseur différentiel $y'' + p_2y = 0$, elle n'a pas d'invariants[1]. Posons encore $p_2 = -3\alpha$. Nous aurons:

[1] *Nous avons choisi une forme spéciale, mais il serait facile de généraliser ce résultat.*

57) $y^{IV} - 6\alpha y'' - 6\alpha' y' + 3(3\alpha^2 - \alpha')y = 0.$

Cette équation présente une analogie frappante avec une autre, que nous étudierons plus tard.

X.

M. Halphen a introduit la notion importante de l'équation canonique invariante, mais comme la plupart des définitions de cet éminent géomètre, celle qui nous occupe en ce moment doit être posée d'une manière un peu plus précise.

D'après M. Halphen, si l'on choisit une substitution telle, que l'invariant transformé quelconque, par exemple celui de Brioschi $v = 3p_2' - 2p_3$ devient égal à 1, l'équation transformée aura cette propriété remarquable que tous ses coefficients seront des invariants absolus. Remarquons que cette affirmation n'est exacte que dans le cas si nous généralisons un peu notre définition des invariants, qui étaient jusqu'ici des fonctions entières ou au moins rationnelles des coefficients et de leurs dérivées.

Nous avons vu que $V = x_1^3 v$. Si donc $v = 1$, l'invariant V de la proposée sera égal au cube du module ou bien x_1 sera égal à $V^{\frac{1}{3}}$. On voit que dans ce cas l'invariant dépend essentiellement du module et réciproquement. Si l'équation proposée a la forme normale $(P_1 = 0)$, on sait que $\frac{Y}{y} = U_0$ dépend aussi de la valeur de module, U_0 étant égal à $x_1^{-\frac{n-1}{2}}$. Dans le cas actuel $U_0 = V^{-\frac{n-1}{6}}$. Si la proposée avait la forme générale, il suffit d'introduire le facteur $e^{-\int P_1 dX}$ et de poser: $Y = V^{-\frac{n-1}{6}} e^{-\int P_1 dX}$. y.

Considérons maintenant la formule générale 30) $(n)_s U_0 x_1^n p_s = (A_{0n-s} + \omega)_n$ où $\omega_k = (P + U)_k$.

Or p_s étant une fonction linéaire de $P_1, \ldots P_s$ avec des coefficients qui ne dépendent que de V et de $e^{-\int P_1 dX}$ on voit que p_2 ne dépend que de V, P_1, P_2 et de $e^{-\int P_1 dX}$. Mais comme on peut toujours faire disparaître P_1 et P_2 au moyen d'une équation différentielle du deuxième ordre on verra que p_2 ne dépendra que de l'invariant V, et comme le

module x_1 est égal à une puissance fractionnaire de cet invariant, p_2 sera une fonction de V seule. Donc p_2 est un invariant absolu de la proposée.

Halphen a appliqué cette méthode au calcul des invariants (non primitifs). Mais ces calculs sont d'une nature très compliquée et ce géomètre l'a avoué lui-même. A propos de son invariant Δ Halphen dit: »On calcule mais péniblement cet invariant«. Nous voulons donner une méthode plus rapide et plus simple.

Soit $(P + Y)_n = 0$ l'équation proposée tout a fait générale, $(p + y)_n = 0$ la transformée où $p_1 = 0$ (forme normale).

Nous supposons en outre la transformation telle que $v_3 = 3p_2' - 2p_3 = 1$. On a donc $p_3 = \frac{1}{2}(3p_2' - 1)$.

Écrivons $u_1 = \frac{U_1}{U_0}$, $u_2 = \frac{U_2}{U_0}$ etc.; $\frac{x_2}{x_1} = L_1$, $\frac{dL_1}{dX} = L_2$ etc., $\frac{x_2}{x_1} = \lambda_1$, $\frac{x_3}{x_1} = \lambda_2$ etc., $\frac{V_1}{V_0} = v_1$ etc.

Nous aurons: $p_1 = 0 = \frac{n-1}{2} x_1^{n-2} x_2 + x_1^{n-1}(P_1 + u_1)$;

$u_1 = -\frac{n-1}{2}\frac{x_2}{x_1} - P_1$; puis $\frac{x_2}{x_1} = L_1 = \frac{1}{3}v_1$.

On a donc: $u_1 = -\frac{n-1}{6}v_1 - P_1$.

D'autre part on a:

$$p_2 x_1^2 = \frac{n-2}{12}[4\lambda_2 + 3\lambda_1^2(n-3) + (u_1 + P_1)\lambda_1 + u_2 + 2P_1 u_1 + P_2].$$

Mais on sait que $\lambda_2 = L_2 + L_1^2$ et d'une manière analogue:

$$u_1 = -\left(\frac{n-1}{6}v_1 + P_1\right) = M_1; \quad \lambda_2 = \frac{3v_2 - 2v_1^2}{9};$$

$$u_2 = M_2 + M_1^2 = -\frac{n-1}{6}(v_2 - v_1^2) - P_1' + \left(\frac{n-1}{6}\right)^2 v_1^2 + \frac{n-1}{3}v_1 P_1 + P_1^2.$$

Substituant dans $p_2 x_1^2$ on obtient:

$$p_2 x_1^2 = -\frac{n+1}{18}v_2 + \frac{7(n+1)}{4 \cdot 27}v_1^2 - P_1' + P_1^2 - 2P_1^2 + P_2.$$

Mais $x_1^2 = \sqrt[3]{V^2}$. On aura donc finalement:

$$p_2 \sqrt[3]{V_0^8} = V_0^2[P_2 - P_1^2 - P_1'] - V_0 V_2 \frac{n+1}{18} + \frac{7(n+1)}{4 \cdot 27} V_1^2.$$

Posons: $V^2[P_2 - P_1^2 - P_1'] - VV_2 \frac{n+1}{18} + \frac{7(n+1)}{2^2 \cdot 3^3} V_1^2 = \Delta$,

nous aurons: $p_2 = \frac{\Delta}{\sqrt[3]{V^8}}$.

Or nous avons démontré que p_2 est un invariant de la proposée. $\sqrt[3]{V^8}$ étant aussi un invariant (irrationnel bien entendu), Δ sera un nouvel invariant et comme p_2 (étant un invariant absolu) est de dimension zéro, V étant de dimension 3, Δ doit être de dimension 8.

Notre invariant Δ est au facteur $\frac{1}{27}$ près égal à l'invariant Δ de M. Halphen.

Il est facile de démontrer que l'invariant Δ peut être obtenu par un procédé tout a fait différent et beaucoup plus rapide. Nous allons démontrer que si l'équation proposée a la forme canonique ($P_1 = 0$, $P_2 = 0$) l'invariant Δ n'est autre chose que le »quadrinvariant« de M. Forsyth formé de l'invariant primitif V qui se réduit dans notre cas à $-3P_3$.

En effet, on a dans ce cas $\Delta = VV_2 \frac{n+1}{18} + \frac{7(n+1)}{4 \cdot 27} V_1^2 = \frac{P_3 P_3''}{2}(n+1) - \frac{7(n+1)}{2^2 \cdot 3}(P_3')^2$.

Le facteur numérique $n+1$ quoique dépendant de l'ordre de l'équation $(P+Y)_n = 0$ peut être rejeté puisque c'est le facteur commun à tous les termes de l'invariant Δ. Nous pouvons donc poser, en rejetant $\frac{n+1}{2}$ et en écrivant Φ_8 au lieu de Δ:

$$\Phi_8 = 6P_3P_3'' - 7(P_3')^2.$$

Or l'invariant $V_3 = -3P_3$ peut être écrit $V_3 = P_3$ puisque le facteur numérique -3 ne nous intéresse point. Appliquons à cet invariant le procédé qui nous a donné les quadrinvariants. Formons $2kM_2 - M_1^2$ en posant $M_1 = \frac{\Phi_1}{\Phi_0}$. Dans le cas actuel $\Phi_0 = V = P_3$, $k = 3$. On a donc:

$$2kM_2 - M_1^2 = \frac{6V_2V_0 - 7V_1^2}{V_0^2}.$$

Or V_0^2 est un invariant, $2kM_2 - M_1^2$ est aussi un invariant de l'équation canonique ($P_1 = 0$, $P_2 = 0$). Par conséquent $6V_2V_0 - 7V_1^2 = 6P_3''P_3 - 7(P_1')^2$ est un invariant et on voit immédiatement que ce n'est autre chose que Φ_8 ou Δ.

Nous avons donc démontré que l'invariant Δ de Halphen pour l'équation canonique ($P_1 = 0$, $P_2 = 0$) n'est autre chose que le quadrinvariant qui dérive de V, où V est l'invariant fondamental de dimension 3.

XI.

Dans le IV. volume de son Journal M. Liouville a démontré qu'on peut toujours transformer une équation de deuxième ordre au moyen d'une substitution irrationnelle en une équation de n-ième ordre.

Pour y parvenir M. Liouville pose dans l'équation $z'' = az' + bz$, $z = y^{\frac{1}{n-1}}$ ou bien $y = z^{n-1}$ et obtient une équation d'ordre n dans laquelle on a:

$$y^{(n)} = Az(z')^{n-1} + Bz^2(z')^{n-2} + \ldots + Lz^{n-1}.$$

On démontre facilement, que si z_1 et z_2 sont deux intégrales de $z'' = az' + bz$ qui forment un système fondamental, les quantités $\eta_1 = z_1^{n-1}$, $\eta_2 = z_1^{n-2}z_2$, . . . , $\eta_n = z_2^{n-1}$ formeront un système fondamental de $(p + y)_n = 0$, si nous désignons ainsi l'équation de Liouville. On trouvera encore: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\eta_2}{\eta_3} = \ldots \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} = t$.

Le système fondamental $\eta_1, \ldots \eta_n$ est donc équivalent à celui-ci:

$$\eta_n, \ \eta_n t, \ \ldots \ \eta_n t^n$$

et entre trois intégrales consécutives il existera une relation quadratique $\eta_1\eta_3 = \eta_2^2$ etc.

Dans le cas spécial $t = x$ l'équation de Liouville aura n solutions »égales«.

Le calcul direct donné par Liouville et par Halphen est extrêmement long. M. Laurent dit sur ce sujet: »S'il fallait effectivement appliquer ce procédé à la recherche des invariants, il faudrait y renoncer. Car les calculs seraient d'une longueur rebutante.«

Nous voulons donc donner une nouvelle méthode pour former l'équation de Liouville qui est plus expéditive et qui en même temps met en évidence quelques propriétés de cette équation:

Nous posons: $Z_r = (k^r)z^{k-r}(z')^r$, où $z' = \frac{dz}{dx}$, $(k^r) = k \cdot k - 1 \cdot k - 2 \ldots k - r + 1$.

Nous voulons choisir l'équation du second ordre $z'' = \alpha z$ ce qui est permis et nous poserons enfin $y = z^{n-1} = z^k$.

Nous commençons par établir la formule récurrente:

$$58)\quad Z_{r+1} = Z'_r - r(k - r + 1)\alpha Z_{r-1}.$$

Il suffit de rappeler que $Z_r = (k^r)z^{k-r}(z')^r$ et par conséquent:

$$Z_{r+1} = (k^{r+1})z^{k-r-1}(z')^{r+1}$$
$$Z_{r-1} = (k^{r-1})z^{k-r+1}(z')^{r-1}$$
$$Z'_r = (k^r)(k-r)z^{k-r-1}z' \cdot (z')^r + (k^r)z^{k-r}(z')^{r-1}z''$$

d'où il suit:

$$Z'_r = Z_{r+1} + \alpha r(k - r + 1)Z_{r-1} \text{ c. q. f. d.}$$

Mais on a: $Z_0 = z^k = y$, $Z_1 = kz^{k-1}z' = y'$. On trouve donc:

$$Z_2 = Z_1' - k\alpha Z_0 = y'' - k\alpha y$$
$$Z_3 = Z'_2 - 2(k-1)\alpha Z_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z_k = Z'_{k-1} - 2\alpha(k-1)Z_{k-2}$$
$$Z_{k+1} = Z'_k - \alpha k Z_{k-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit par exemple $k = 3$ ou $k + 1 = 4$. On aura:

$$59)\quad Z_4 = y^{IV} - 10\alpha y'' - 10\alpha' y' + (9\alpha^2 - 3\alpha'')y = 0.$$

Généralement on a par définition:

$Z_r = (k^r)z^{k-r}(z')^r$; mais $(k^k) = k!$, $(k^{k+1}) = 0$, par conséquent $Z_{k+1} = 0$ et $Z_{k+2} = Z'_{k+1}$.

On voit donc que la substitution $y = z^k$ conduit à l'équation $Z_{k+1} = 0$ qui est d'ordre $k + 1$ et que les équations $Z_{k+2} = 0$ etc. ne donnent rien de nouveau.

La comparaison de l'équation 59) avec l'équation 57) $(y'' + p_2 y)'' + (y'' + p_2 y)p_2 = 0$ où l'on a posé $p_2 = -3\alpha$ montre l'analogie qui existe entre la théorie de Liouville et celle du diviseur différentiel.

Il suffit de regarder ces deux équations:

$$57)\quad y^{IV} - 6\alpha y'' - 6\alpha' y' + (9\alpha^2 - 3\alpha'')y = 0$$

$$59)\quad y^{IV} - 10\alpha y'' - 10\alpha' y' + (9\alpha^2 - 3\alpha'')y = 0$$

pour reconnaître cette analogie.

Dans le cas où $\alpha y'' + \alpha' y' = 0$ ou bien $\alpha y' = \text{Const.} = b$ les deux équations coïncident et donnent une seule:

$$60)\quad y^{IV} + (9\alpha^2 - 3\alpha'')y = 0$$

qui jouit de leurs propriétés communes.

Il est très facile de vérifier que les invariants v_3 et $v_4 = \gamma$ de l'équation 59) cela veut dire de l'équation de Liouville sont identiquement nuls, comme on pouvait s'y attendre, cette équation étant une transformée identique de l'équation du second ordre.

L'équation normale du second ordre jouit d'une propriété remarquable: elle est sa propre adjointe, ce qu'on vérifie immédiatement, la formule générale de l'adjointe étant $[(1-p) + u]_n = 0$. On a: $y'' + p_2 y = 0$, $u'' + (1-p)_2 u = 0 = u'' + p_2 u$.

Donc la même propriété doit caractériser l'équation de Liouville, ce qu'on pourra vérifier sans peine. Un invariant quelconque de l'adjointe étant au signe près égal à l'invariant correspondant de la proposée, on voit immédiatement que tout invariant de l'équation $y'' + p_2 y = 0$ ainsi que de l'équation de Liouville est identiquement nul.

Pour l'équation 59) on trouve par exemple: $v_3 = -5\alpha' + 5\alpha' = 0$,

$$v_4 = w_4 = 9\alpha^2 - 3\alpha'' + \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}\alpha'' - \frac{3^4}{5^2}\cdot\frac{5^2}{3^2}\alpha^2 = 0.$$

XII.

La question sur le nombre des invariants indépendants est extrêmement délicate. Tout ce qu'on peut affirmer sur ce point est le fait incontestable qu'étant donnée la partie littérale d'un invariant dit primitif on peut déterminer sans ambiguité ses coefficients numériques.

On a vu cependant la possibilité de former des invariants tels que $\Delta = 6P_3''P_3 - 7(P_3')^2$ et comme cet invariant est propre aux équations dont l'ordre surpasse 2, on voit que la dimension d'un invariant (ici $= 8$) peut bien surpasser l'ordre de l'équation. Or nous savons que Δ dépend si non algébriquement du moins analytiquement de V qui est un invariant primitif.

M. Forsyth a essayé de déterminer le nombre des invariants primitifs (dont une partie est linéaire) au moyen de la considération suivante qui semble manquer de rigueur. Soit ρ_{s-1} une fonction de $P_1, \ldots . P_{s-1}$ et de leurs dérivées, mais qui ne doit pas contenir P_s et ses dérivées. Nous pouvons écrire d'après ce qui précède:

$$p_s x_1^{\,s} = P_s + \rho_{s-1} \text{ et ensuite: } p_{s-1} x_1^{\,s-1} = P_{s-1} + \sigma_{s-2}.$$

Différentions cette dernière égalité. Nous aurons:

$$60)\quad p'_{s-1} x_1^{\,s} - P'_{s-1} + s x_1^{\,s-1} p_{s-1} L_1 = \tau_{s-2},$$

où τ_{s-2} ne dépend que de $P_1, \ldots P_{s-2}$ et de leurs dérivées.

Multiplions 60) par λ où λ est un facteur arbitraire et formons:

$$x_1^{\,s}(p_s - \lambda p'_{s-1}) - (P_s - \lambda P'_{s-1}) = \rho_{s-1} - \lambda\tau_{s-2} - \lambda s x_1^{\,s-1} p_{s-1} L_1.$$

Choisissons λ de manière à avoir: $\rho_{s-1} - \lambda s x_1^{\,s-1} p_{s-1} L_1 = 0$, nous aurons: $x_1^{\,s}(p_s - \lambda p'_{s-1}) - (P_s - \lambda P'_{s-1}) = -\lambda\tau_{s-2}$.

On trouve facilement $\lambda = \dfrac{s-1}{2}$; donc la différence:

$$x_1^{\,s}(p_s - \lambda p'_{s-1}) - (P_s - \lambda P'_{s-1}) = \frac{1-s}{2}\tau_{s-2}$$

sera d'une dimension inférieure à celle de p_s.

M. Forsyth croit y voir une contradiction évidente, puisque une combinaison linéaire de deux invariants de dimension s ne saurait donner un nouvel invariant de dimension $s-2$ ou même $s-1$. Or cette conclusion tombe en défaut, si ψ_{s-2} est identiquement égal à zéro, où ψ_{s-2} est la combinaison dont il est question. On peut démontrer que τ_{s-2} n'est pas nul: autrement $P_s - \dfrac{s-1}{2} P'_{s-1}$ serait un invariant ce qui est impossible, un invariant de l'équation générale devant contenir à moins trois coefficients; s'il n'en a que deux on pourra les faire disparaître par la transformation connue et l'invariant transformé sera identiquement nul, donc cet invariant ne peut pas exister. Mais τ_{s-2} n'est pas la fonction dont nous avons parlé plus haut. Soit Φ_s un invariant de dimension s, F_s un autre invariant de la même dimension, il faut prouver que la combinaison $\Phi_s + kF_s$ doit être de dimension s, si elle n'est pas identiquement nulle, mais M. Forsyth ne l'a nullement prouvé. En effet, Φ_s est une fonction de la forme:

$$\Phi_s = P_s + a_1 P'_{s-1} + \ldots . + k_1 P_{s-2} P_2 + \ldots$$

et d'une manière analogue:

$$F_s = P_s + b_1 P'_{s-1} + \ldots\ldots + m_1 P_{s-2} P_2 + \ldots\ldots$$

Pour prouver que la combinaison: $\Phi_s + k'F_s$ est identiquement nulle, si elle est égale à une fonction de dimension $< s$, il suffit de rappeler la loi de homogénéité sans qu'il y ait besoin d'une autre preuve. On doit avoir:

$\Phi_s + kF_s = x_1{}^s(\varphi_s + kf_s)$ et si l'on avait $\Phi_s + kF_s = \tau_{s-2}$; on obtiendrait la condition impossible: $\tau_{s-2} = x_1{}^s t_{s-2}$ où t est la transformée de τ, puisqu'on doit avoir en même temps $\tau_{s-2} = x_1{}^{s-2} t_{s-2}$.

Il nous reste maintenant de considérer les invariants différentiels qu'on pourrait aussi appeler des invariants homographiques.

Considérons l'équation »exceptionnelle« de troisième ordre:

$$Y_3 + 3P_1 Y_2 = 0$$

qui se réduit à une équation de premier ordre si l'on pose $Y_2 = z$.

L'invariant fondamental V_3 devient dans ce cas égal à $V = -P_1'' - 6P_1 P_1' - 4P_1{}^3$.

Soit η une intégrale quelconque de l'équation proposée: Désignons $\frac{d\eta}{dX}$ par η' etc. Nous aurons $\eta''' + 3P_2\eta'' = 0$ ou ce qui est la même chose: $P_1 = -\frac{1}{3}\frac{\eta'''}{\eta''}$.

Posons encore comme d'habitude:

$$\frac{\eta'''}{\eta''} = \lambda_1 = L_1; \quad \frac{\eta^{IV}}{\eta''} = \lambda_2; \quad \frac{dL_1}{dX} = L_2 \text{ etc.}$$

Nous aurons: $L_2 = \lambda_2 - \lambda_1{}^2$; $L_3 = \lambda_3 - 3\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1{}^3$ d'après les formules connues.

Posons $V = -W$ et écrivons:

$$W = \frac{1}{3}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)'' - \frac{6}{3^2}\frac{\eta'''}{\eta''}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)' + \frac{4}{3^3}\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)^3.$$

Le calcul direct serait trop long, mais nos formules donnent aussitôt:

$$W = \frac{1}{3}L_3 - \frac{2}{3}L_1 L_2 + \frac{4}{27}L_1{}^3 \text{ ou bien:}$$

$$27W = 9L_3 - 18L_1 L_2 + 4L_1{}^3.$$

Substituons les dérivées symboliques λ au lieu de derivées L_1 etc., nous aurons:

$$27W = 9\lambda_3 - 45\lambda_1\lambda_2 + 40{\lambda_1}^3$$

et en substituant au lieu de W et λ leurs valeurs:

$$-27V = \frac{9\eta^{V}}{\eta'''} - 45\frac{\eta'''\eta^{IV}}{(\eta'')^2} + 40\left(\frac{\eta'''}{\eta''}\right)^3$$

ou bien:

$$-27V{\eta''}^3 = 9\eta^{V}{\eta''}^2 - 45\eta''\eta'''\eta^{IV} + 40{\eta'''}^3 = K.$$

Nous disons maintenant que l'équation $K = 0$ n'est autre chose que l'équation différentielle des coniques et que K est un invariant homographique. Pour le prouver d'une manière très simple sans recourrir aux méthodes imaginées par M. Halphen, écrivons l'équation générale d'une conique.

$$\eta = \alpha\xi + \beta + \sqrt{A\xi^2 + 2B\xi + C}$$

où nous avons écrit ξ au lieu de X pour plus de symétrie.

Soit $R = A\xi^2 + 2B\xi + C$. Différentions l'équation donnée; nous aurons d'abord:

$$\eta' = \alpha + \frac{A\xi + B}{\sqrt{R}}$$

puis $\eta'' = \Delta R^{-\frac{3}{2}}$ où Δ est le discriminant $AC - B^2$.

Il suit: ${\eta''}^{-\frac{2}{3}} = \Delta^{-\frac{2}{3}}R =$ à un trinome du deuxième degré.

Différentions encore trois fois successivement, nous aurons:

$$64)\quad \left({\eta''}^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0$$

et c'est l'équation différentielle de toutes les coniques.

Posons pour un moment $\eta'' = \alpha$ et développons, nous aurons:

$$\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -\frac{2}{3}\alpha^{-\frac{5}{3}}\left(\alpha''' - \frac{10}{3}\alpha^{-1}\alpha'\alpha'' - \frac{5}{3}\alpha\alpha'\alpha'' + \frac{40}{9}\alpha^{-2}\alpha'^3\right)$$

ou bien: $9\alpha'''\alpha^2 - 45\alpha\alpha'\alpha'' + 40\alpha'^3 = 0.$

Écrivons de nouveau $\alpha = \eta''$ nous retrouverons 63) $K = 0$, c. q. f. d.

Posons maintenant $\frac{\eta''}{2!} = a_2$ et généralement $\frac{\eta^{(k)}}{k!} = a_k$, nous aurons:

$$K = -40\cdot 6^3{a_3}^3 + 45\cdot 2\cdot 6\cdot 24a_2a_3a_4 - 9\cdot 4\cdot 120{a_2}^2a_5 \text{ ou bien:}$$

$$65)\quad -2{a_3}^3 + 3a_2a_3a_4 - {a_2}^2a_5 = 0 = K$$

ou enfin:

$$66)\quad K = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2 & 2a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Récapitulons nos résultats.

Étant donnée l'équation du troisième ordre:

$$\eta''' + 3P_1\eta'' = 0$$

qui se réduit à $\alpha' + 3P_1\alpha = 0$,

calculons $P_1 = -\frac{1}{3}\frac{\eta'''}{\eta''} = -\frac{1}{3}\frac{\alpha'}{\alpha}$; formons l'invariant fondamental $W = -27V$ en le multipliant par $\eta''^3 = \alpha^3$ et égalons $W\alpha^3$ à zéro, nous obtiendrons l'équation:

$$K = 0 = \left(\eta''^{-\frac{2}{3}}\right)'''$$

qui n'est autre chose que l'équation différentielle des coniques, dont l'intégrale générale sera de la forme:

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F = 0.$$

En effectuant la transformation homographique générale:

$$\xi = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''};\quad \eta = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

nous obtiendrons une nouvelle conique donnant la même équation différentielle. Donc K est un invariant différentiel (homographique).

M. Halphen a donné une méthode bien ingénieuse pour trouver l'équation différentielle d'une courbe algébrique quelconque. Mais cette méthode étant basée sur un artifice (comme le dit M. Halphen lui-même) et sur des considérations géométriques assez compliquées, nous préférons une autre voie.

Avant de simplifier la méthode de M. Halphen, il sera utile de démontrer que la voie qui semble être la plus naturelle pour traiter cette question, n'est pas la plus simple. Si l'on voulait éliminer les paramètres par des méthodes élémentaires du calcul différentiel, non seulement les calculs seraient trop longs, mais on aurait introduit des facteurs étrangers au problème.

Soit donné:

$$\begin{gathered} A \\ + (n)_1(Bx + Cy) \\ + (n)_2(Dx^2 + 2Exy + Fy^2) \\ + \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

l'équation générale d'une courbe algébrique de degré n que nous représenterons par un symbole[1] permettant d'abréger les calculs. Ainsi la cubique plane générale:

$$\begin{gathered} A \\ + 3(Bx + Cy) \\ + 3(Dx^2 + 2Exy + Fy^2) \\ + Gx^3 + 3Hx^2y + 3Jxy^2 + Ky^3 \end{gathered}$$

sera représentée par le symbole:

$$\Phi_3 = \begin{vmatrix} A\,B\,D\,G & x \\ C\,E\,H & \\ F\,J & \\ K & \\ & y \end{vmatrix}$$

La théorie de ces symboles présente quelques analogies avec celle des déterminants. Ainsi on trouve $\frac{1}{3}\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} = \begin{vmatrix} B\,D\,G \\ E\,H \\ J \end{vmatrix} = B + 2Dx + 2Ey + Gx^2 + 2Hxy + Jy^2$ et cette expression est le »mineur« relatif à l'élément B.

On trouve encore: $\frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2} = \begin{vmatrix} D\,G \\ H \end{vmatrix} = D + Gx + Hy$ et ainsi de suite. Pour écrire les dérivées partielles de Φ_3 il suffit donc de rayer des colonnes et des lignes d'une manière convenable et d'introduire les facteurs 3, $2\cdot 3$ etc.

Remarquons qu'en écrivant $\begin{matrix} z & \\ \begin{vmatrix} D\,G \\ H \end{vmatrix} & x \\ y & \end{matrix} = Dz + Gx + Hy$ etc. on peut facilement écrire sans aucun calcul en coordonnées homogènes l'équation de la Hessienne d'une courbe algébrique quelconque.

Appliquons cette méthode à la recherche de l'équation différentielle des coniques. Nous trouverons bien facilement après avoir différentié

---

[1] *Voir notre article dans le 5. Cah. de la Zeitschrift für Mathematik und Physik 1892: Symbolische Zahlen und Doppelzahlen.*

trois fois l'équation générale: $\begin{vmatrix} A & B & D \\ C & E & \\ F & & \end{vmatrix}^{x}_{y} = 0$ et en éliminant trois paramètres qui y restent après cette différentiation:

$$\begin{vmatrix} 3y'' + xy''' & 3y'y'' + y'''y & y''' \\ 4y''' + xy^{IV} & 4y'y''' + 3y''^2 + yy^{IV} & y^{IV} \\ 5y^{IV} + xy^{V} & 10y''y''' + 5y'y^{IV} + yy^{V} & y^{V} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est assez compliqué. On le simplifie en l'écrivant

$$\begin{vmatrix} 3y'' & 3y'y'' & y''' \\ 4y''' & 4y'y''' + 3y''^2 & y^{IV} \\ 5y^{IV} & 10y''y''' + 5y'y^{IV} & y^{V} \end{vmatrix} = 9y^{V}y''^2 - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0$$

comme on a déjà trouvé par une méthode différente.

Nous allons exposer une autre méthode beaucoup plus expéditive qui n'est qu'une transformation analytique de la méthode de Halphen, cette dernière étant fondée sur les considérations géométriques. Nous ne voulons emprunter à la géométrie que la notion la plus simple d'une tangente.

Soit donnée une courbe algébrique quelconque et ξ, η un point ordinaire (non singulier) de cette courbe. Dans le voisinage de ce point on pourra développer l'ordonnée η suivant la série de Taylor. Soit $\eta = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots$ ce développement où l'on a posé $\frac{\eta_0^{(k)}}{k!} = a_k$.

L'équation différentielle d'une courbe ne dépendant pas des paramètres, nous pouvons choisir au lieu des axes fixes les axes momentanés. Soit ξ, η un système de coordonnées rectangulaires tel que l'axe ξ n'est autre chose que la tangente *MT*, l'axe η sera la normale *MN* et on aura $a_0 = 0$, $a_1 = 0$. Donc avec ce choix des axes on aura $\eta = a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots$.

Substituons cette valeur de η dans l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ de la courbe donnée; nous devons obtenir une équation identique en ξ. Les coefficients des différentes puissances de ξ seront donc identiquement nuls et nous aurons un système d'équations, dont on pourra éliminer tous les paramètres. La résultante sera une équation en a_2, a_3 . . . . et il

suffira de substituer ξ, η au lieu de ξ_0, η_0 (cela veut dire de faire varier le point ξ, η en le faisant parcourir la courbe entière) pour obtenir l'équation cherchée.

Appliquons cette méthode à une conique que nous supposons passer par le point ξ_0, η_0 qu'on peut prendre pour l'origine des coordonnées. Nous aurons donc:

$$A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta = 0.$$

Substituons: $\eta = a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots$

$$\xi\eta = a_2\xi^3 + a_3\xi^4 + \ldots$$

$\eta^2 =$ symboliquement à: $a_2{}^2$

$$\begin{array}{lll} 2a_2a_3 & a_3{}^2 & \\ 2a_2a_4 & 2a_3a_4 & a_4{}^2 \\ 2a_2a_5 & 2a_3a_5 & 2a_4a_5 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

ce qui veut dire $\eta^2 = a_2{}^2\xi^4 + 2a_2a_3\xi^5 + (a_3{}^2 + 2a_2a_4)\xi^6 + \ldots$

On trouve donc l'identité:

$$0 = D\xi + \xi^2 \begin{vmatrix} A \\ Ea_2 \end{vmatrix} + \xi^3 \begin{vmatrix} Ba_2 \\ Ea_3 \end{vmatrix} + \xi^4 \begin{vmatrix} Ba_3 \\ Ca_2{}^2 \\ Ea_4 \end{vmatrix} + \xi^5 \begin{vmatrix} Ba_4 \\ 2Ca_2a_3 \\ Ea_5 \end{vmatrix} + \ldots$$

Or on sait a priori que l'équation différentielle des coniques est du cinquième ordre, une conique ne possédant que cinq paramètres indépendants. Il ne nous faut considérer que les termes où entrent $a_2, \ldots a_5$. Mais a_2 se trouve déjà dans le coefficient de ξ^3; il suffit donc d'annuler les coefficients de ξ^3, ξ^4 et ξ^5 pour avoir trois équations linéaires et homogènes en trois paramètres B, C, E que l'on pourra avec des coefficients composés de $a_2, \ldots a_5$. La résultante de ce système est le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 & a_3 \\ a_3 & a_2{}^2 & a_4 \\ a_4 & 2a_2a_3 & a_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Or a_2 n'est pas nul, $a_2 = 0$ étant l'équation différentielle des lignes droites. On pourra donc diviser par a_2 et on retrouve l'équation $K = 0$.

Cette méthode pour former l'équation différentielle d'une courbe algébrique est absolument générale. Le seul inconvénient est la nécessité

de calculer les puissances des séries; mais ce calcul devient extrêmement simple, si l'on a soin d'employer notre méthode des nombres symboliques, indiquée dans le Journ. de Math. publié par Delagrave (1887).

Il ne nous reste maintenant qu'à montrer quelques propriétés fondamentales des invariants homographiques.

Soit $f(X, Y, Y_1, \ldots Y_n)$ un invariant homographique (invariant différentiel de M. Halphen). Effectuons la transformation homographique:

$$X = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}; \quad Y = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}.$$

Posons $ax + by + c = \lambda$, $a'x + b'y + c' = \mu$, $a''x + b''y + c'' = \nu$, ou bien:

	x	y	z
λ	a	b	c
μ	a'	b'	c'
ν	a''	b''	c''.

Soit D le déterminant de ce système.

Par définition $f(X, Y, Y_1 \ldots Y_n) = Mf(x, y, y', \ldots y^{(n)})$, où M est un certain module que nous voulons déterminer[1].

Nous avons d'abord $X' = \frac{dX}{dx} = \frac{\lambda'\nu - \lambda\nu'}{\nu^2}$; $Y' = \frac{dY}{dx} = \frac{\mu'\nu - \mu\nu'}{\nu^2}$;

$$Y_1 = \frac{Y'}{X'} = \frac{\mu'\nu - \mu\nu'}{\lambda'\nu - \lambda\nu'}.$$

Calculons maintenant $Y_2 = \frac{X'Y'' - Y'X''}{(X')^3}$.

On a: $X'' = \frac{(\lambda''\nu - \lambda\nu'')\nu^2 - 2\nu\nu'(\lambda'\nu - \lambda\nu')}{\nu^4}$

et d'une manière analogue $Y'' = \begin{vmatrix} \mu \\ \lambda \end{vmatrix} X''$.

---

[1] *Dans sa thèse Halphen donne une définition qui diffère de la précédente. D'après Halphen f est un invariant différentiel, si les équations $f(X, Y, Y_1 Y_2 \ldots) = 0 = f(x, y, y', y'' \ldots)$ sont vérifiées simultanément. Halphen croit pouvoir démontrer qu'un tel invariant ne contient ni x ni y ni même y'; mais il ne remarque pas l'influence du module. En tout cas, si l'invariant $f = 0$ représente l'équation des courbes algébriques, on pourra par une transformation des axes faire disparaître y et y'.*

On a donc: $X'Y'' - Y'X'' = \frac{\nu^3\delta}{(\lambda'\nu - \lambda\nu')^3}$, où $\delta = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} ax + by + c & a + by' & by'' \\ a'x + b'y + c' & a' + b'y' & b'y'' \\ a''x + b''y + c'' & a'' + b'y' & b''y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} y'' = Dy''.$$

On trouve donc: $Y_2 = \frac{\nu^3 Dy''}{(\lambda'\nu - \lambda\nu')^3}$.

Il est facile de démontrer qu'on a:

$$Y_3 = \frac{\nu^3 Dy'''}{(\lambda'\nu - \lambda\nu')^3} \frac{\nu^2}{(\lambda'\nu - \nu'\lambda)} + R_3 \frac{\nu^4}{(\nu\lambda' - \lambda\nu')^5}$$

et R_3 ne doit pas contenir y'''. On a donc:

$$Y_3 = \frac{D\nu^5 y'''}{(\lambda'\nu - \lambda\nu')^4} + \frac{R_3\nu^4}{(\lambda'\nu - \nu'\lambda)^5}$$

et généralement:

$$67)\quad Y_n = \frac{\nu^{2n-1} y^{(n)}}{(\lambda'\nu - \lambda\nu')^{n+1}} + \frac{\nu^{n+1} R_n}{(\lambda'\nu - \nu'\lambda)^{2n-1}} \quad (n > 2.)$$

Ces formules dans le cas où l'invariant a la forme:

$$f(Y_2, Y_3, \ldots Y_n) = Mf(y_2, y_3 \ldots y_n)$$

conduisent à la formule: $M = D^k \nu^{2p-k} (\nu\lambda' - \lambda\nu')^{-(p+k)}$.

On démontre facilement l'analogie complète de ces invariants homographiques avec ceux des équations linéaires.

M. Roger Liouville a étudié les invariants des équations non linéaires (J. de l'École Polytechnique 1889) au moyen des méthodes a peu près semblables.

Quant aux applications analytiques des invariants des équations linéaires ainsi que des invariants homographiques il suffit de dire que la considération des invariants permet quelquefois d'établir a priori les propriétés fondamentales d'une équation linéaire. Ainsi on peut déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle linéaire puisse se transformer en une équation ayant les coefficients constants ou même les coefficients variables de nature donnée (fonctions de genre zéro, fonctions doublement périodiques etc.). De telles recherches ont été données pour la prémière fois par Halphen dans son mémoire qui a obtenu le grand prix des mathématiques.

La théorie d'irréductibilité n'a pas été jusqu'à présent appliquée à ce genre de recherches; nous en avons donné la première suggestion en traitant la méthode du diviseur différentiel, et il est bien possible que cette méthode ouvrira des points de vue nouveaux ou à peine ébauchés jusqu'ici.

D'autre part, dans ces derniers temps on a fait sur les invariants différentiels des études très variées. Il suffit de mentionner les travaux de MM. Lie, Klein, Engel, Mehmcke, Study, Knoblauch, Scheffers, Voss en Allemagne, de MM. Appell, Picard, Poincaré, Painlevé, Vessiot en France, de MM. Sylvester, Forsyth, Elliot, Rogers, Mac Mahon en Angleterre. La théorie des réciprocants imaginée par M. Sylvester (Messenger XV. S. et C. R. 101 p. 1042 et s.) est aussi étroitement liée à celle des invariants différentiels.

Avant de terminer faisons encore quelques remarques générales.

La théorie de la transformation des équations linéaires que nous avons exposée dans le I. Chapitre contient implicitement un grand nombre de théorèmes particuliers. Il suffit par exemple de l'appliquer au système suivant:

	x	y	z
x'	0	r	$-q$
y'	$-r$	0	p
z'	q	$-p$	0

où t est la variable indépendante et $x' = \frac{dx}{dt}$, avec la substitution:

	ξ	η	ζ
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

pour retrouver les résultats principaux de la théorie des axes instantanés et de celle des courbes gauches. Si l'on ne change pas de variable indépendante et si l'on applique les formules que nous avons données, si l'on suppose en outre que ξ, η, ζ ne dépendent pas du temps de manière à avoir $\xi' = 0$, $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$, on trouve facilement les conditions connues:

$$a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} = 0 \text{ etc.},$$

donc $a^2 + b^2 + c^2 =$ à une constante que l'on peut poser égale à 1 et on voit bien que la substitution est orthogonale et que $a, b, c \ldots$ sont les cosinus connus. On voit encore immédiatement puisque $\xi =$ const. etc. que $x^2 + y^2 + z^2 =$ const. est l'intégrale du système considéré.[1] On démontre facilement les propriétés invariantes d'un tel système.

Mais on peut généraliser, ce qui nous va introduire à des considérations nouvelles que nous ne voulons qu'indiquer ici.

Considérons un système d'équations différentielles linéaires et homogènes :

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \hline y_1' & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ y_2' & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ y_n' & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array}$$

où les y et les a sont des fonctions d'une variable x. Appelons a le déterminant de ce système.

Supposons que ce système admette une intégrale de la forme :

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = \text{Const.} = r^2$$

qui représente le carré du rayon vecteur dans l'espace de n dimensions, $r =$ Const. étant l'équation d'une hypersphère.

Cherchons la condition pour qu'il en soit ainsi. En différentiant la fonction intégrale, nous aurons $\sum_1^n {}_k y_k y'_k = 0$ et comme $y'_k = \sum_1^n {}_i a_{ki} y_i$ nous aurons : $\sum_1^n {}_k \sum_1^n {}_i a_{ki} y_k y_i = 0$. Cette équation sera identique si l'on a : $a_{ki} = -a_{ik}$, $a_{kk} = a_{ii} = 0$.

---

[1] *Cf. Darboux, Théorie des Surfaces, I. P., 19, où ce système est l'objet d'une étude spéciale faite par l'illustre auteur d'après une méthode un peu différente.*

La condition cherchée pour que le système considéré admette une intégrale $r^2 =$ Const. est donc celle-ci: son déterminant doit être le déterminant gauche de M. Cayley.

Nous voulons appeler un tel système d'équations »système aux carrés«, en remarquant que le déterminant lui-même est un carré parfait (égal à zéro s'il est impair) d'après un théorème bien connu.

Le théorème que nous avons établi permet de généraliser la plupart des résultats qu'on n'a obtenus que dans le cas de trois variables.

Vita.

Michel Philippoff est né au village Oknino (Russie, gouvernement de Kieff) en 1858. Il fit ses études au gymnase Richelieu (à Odessa). Il étudiait pendant un certain temps les sciences naturelles à l'Université de la Nouvelle Russie. En 1880 il arriva à Pétersbourg, où il suivait le cours de Mendéléieff et s'occupait des travaux littéraires. Ses études mathématiques ne datent que depuis 1885, quand il a écrit une brochure sur l'algèbre élémentaire, qui a été approuvée par le Comité du Ministère de l'instruction publique.

En 1889 il arriva à Paris et y suivait pendant 1890—91 les cours des professeurs à la faculté des sciences. Au mois de janvier 1892 il arriva à Heidelberg, où il étudiait les sciences mathématiques et la chimie et travaillait dans le laboratoire de V. Meyer. Ses principaux maîtres en mathématiques sont Hermite et Königsberger.